DE
SECTIONIBUS
CONICIS.

TRACTATUS GEOMETRICUS.

In quo, ex Natura ipsius CONI, Sectionum Affectioens facillime deducuntur.

METHODO NOVA.

AUCTORE
HUGONE HAMILTON, A. M.
COLLEGII S. TRINITATIS DUBLINII SOCIO.

LONDINI:
Impensis GUL. JOHNSTON, in vico vulgo dicto, *Ludgate-Street*.
MDCCLVIII.

MAXIME REVERENDO

IN

CHRISTO PATRI AC DOMINO,

GEORGIO,

DIVINA PROVIDENTIA

ARCHIEPISCOPO ARMACHANO;

TOTIUS HIBERNIÆ PRIMATI AC METROPOLITANO;

UNI E JUSTICIARIIS REGNI;

UNIVERSITATIS DUBLINIENSIS VICECANCELLARIO;

REI LITERARIÆ FAUTORI EXIMIO:

HUNC TRACTATUM

HUMILLIME D. D.

HUGO HAMILTON.

PRÆFATIO.

QUANTA sit doctrinæ Sectionum Conicarum præstantia, nil opus est hic differere, cum satis sit eruditis notum quam late pateat usus ejus, non solum in Astronomia & Philosophia Naturali, [illegible] in artibus quibusdam practicis. Non mirum [illegible] Math[illegible] veteres quam recentiores in ea colenda operam impenderint.

Inter Veteres, qui hanc partem Matheseos excoluere, longè eminet Apollonius, qui, propter rerum inventarum præstantiam, & accuratam demonstrandi rationem, apud omnes Magni Geometræ *nomen adeptus est. Tamen Conicorum doctrinam, ab eo traditam, asperam & nimis difficilem esse, eamque difficultatem neque Mydorgium neque alios sustulisse, testatur Clarissimus Wallisius. Hanc etiam doctrinam ii, qui deinceps eam tradiderunt, non satis dilucide tradidisse videntur. Cujus rei si causas exquiramus, inveniemus quod ii qui, nullâ Coni ratione habitâ, Sectiones Conicas per earum descriptiones in plano definiunt, omnes ipsarum affectiones deducere conati sunt, ex singulis affectionibus in unaquaque Sectione, quæ ab affectionibus principalibus & quasi essentialibus longe distant, & iis prorsus sunt dissimiles; in his methodis igitur plurimas propositiones operose*

demonstrare

demonstrare necesse est, priusquam ad affectiones præcipuas & generales devenire licet. Veteres equidem Scriptores, quique eorum vestigiis insistunt, Sectionum Conicarum affectiones ex natura Coni derivandas esse recte judicaverunt; eorum tamen methodi imperfectæ & nimis prolixæ videntur; quia sciz. Sectionum affectiones demonstrare aggressi sunt, priusquam naturam & affectiones ipsius Coni satis inspexerant; unde fit ut magnâ operâ quasdam affectiones de singulis Sectionibus demonstrant quæ ipsi Cono competunt, de quo facile & generaliter demonstrari possunt atque inde ad ipsas Sectiones nullo negotio transferri.

Nec quidem hæc temere dixisse videbor iis, qui diversas aliorum methodos cum ea, qua in tractatu sequenti utor, comparaverint. Qualis autem ista sit, paucis jam expediam.

In Elementis Geometriæ affectiones duarum Sectionum Conicarum, sciz. Trianguli & Circuli, ex ipsarum in plano descriptionibus facillime eliciuntur. Quoniam vero tres reliquas Sectiones, de quibus tractare statuimus, nequaquam in plano ita describere licet, ut earum affectiones ex ipsis descriptionibus facile deducantur; propositum est, harum Figurarum definitiones veteres retinere, & naturam Superficierum Conicarum ita explicare ut simul ac hæ Figuræ definiuntur, per intersectiones planorum cum istis superficiebus, statim pateat quænam sint earum affectiones principales, ex quibus cæteræ facilius deinceps eliciantur. In hunc finem igitur, priusquam hæ Sectiones definiuntur, traduntur quædam affectiones Superficierum Conicarum, ut in Propp. 11, 12, 13, 14. *lib.* 1. *quæ in se continent fere omnes affectiones principales harum Sectionum; & deinde quoniam, ex ipsarum definitionibus, constat eas esse Curvas quarum omnia puncta in Superficie Conica collocantur, manifestum est, omnem lineam rectam, his Sectionibus aliquo modo occurrentem, eodem modo & in iisdem punctis Superficiei Conicæ occursuram;*

omnes

omnes igitur affectiones, quas prius demonstratum est convenire rectis lineis Superficiei Conicæ occurrentibus, ad rectas quæ his Sectionibus occurrunt nullo negotio transferri possint; atque ita harum Sectionum affectiones principales & maxime generales (ex quibus alias facilius deduci posse æquum est sperare) cæteris tanquam fundamentum substernuntur.

Ex hac methodo multa oriuntur commoda. Hinc enim fit, ut omnia quæ tribus Sectionibus conveniunt de iis semper conjunctim demonstrare liceat. Tum eliciendo proprietates particulares ex generalibus, demonstrationes breviores fiunt. Præterea tollitur necessitas utendi Lemmatibus aut iis propositionibus quæ aliis demonstrandis solummodo inserviunt, & quibus opera hujusmodi nimis abundant, itaque istæ tantum propositiones demonstrantur quæ vel aliquem usum in aliis scientiis præstare possint, vel quæ visæ sunt in se continere aliquid speculatione dignum. Deinde ipsas propositiones ita disponere licet, ut omnes Sectionum affectiones ejusdem generis, sive quæ eodem pertinent, simul demonstrentur. Hinc denique patebit causa, quare hæ Curvæ in quibusdam affectionibus longè diversæ, in aliis penitus conveniunt.

Theorematum demonstrationes & Problematum solutiones sunt plerumque novæ; ut nova methodus, novusque propositionum ordo, omnino exigunt. Et, ut demonstrationes fiant more Veterum quam accuratissimæ, quantitates evanescentes punctaque in infinitum abeuntia, *quæ a quibusdam Scriptoribus in demonstrationibus aliquando adhibentur, nullum apud nos locum habent.*

Inter hunccе Tractatum componendum quicquid in operibus aliorum mihi visum est utile, & ad Elementarem hujusmodi institutionem proprie spectare, inserui; & insuper propositiones quasdam attuli a nemine quantum scio antehac traditas: inter quas numerare licet eas, de Superficiebus Conicis, supra memoratas,

moratas, ut & Prop. 54. *lib.* 1. *Propp.* 29, 36, 37. *lib.* 2. *Propp.* 3, 5. *lib.* 3. *Propp.* 6, 9, 11, 12, 13. *lib.* 4. *Prop.* 14. *lib.* 5. *multa quoque corollaria nova passim observabit Lector eruditus.*

Post aliquas propositiones citantur quædam propositiones ex Claris. Newtoni Nat. Phil. Prin. Math. quibus sciz. fusius explicandis propositiones nostræ inservire possint. Nam ut ad ejus Philosophiam (quæ doctrinâ Sectionum Conicarum tanquam fundamento nititur) facilior esset aditus, præcipuum fuit hujusce Tractatus propositum.

ARGUMENTA

ARGUMENTA LIBRORUM.

LIBER PRIMUS.

In novem primis propositionibus tractatur de affectionibus superficierum conicarum quæ ab aliis antehac traditæ sunt. Deinde traduntur aliæ quædam affectiones superficierum, quæ sunt etiam affectiones præcipuæ & generales sectionum conicarum, ut ex ipsarum definitionibus postea demonstratur. Inveniuntur Centra Ellipseos & Hyperbolarum; & exponuntur proprietates quæ omnibus diametris sectionum in genere conveniunt. Agitur etiam de proportione quadratorum rectarum quæ cuivis diametro sectionis ordinatim applicantur. Deinde generationes & affectiones linearum, quæ dicuntur Hyperbolarum asymptoti, dilucide explicantur, & exponitur natura Hyperbolarum conjugatarum. In hoc libro agitur de proportione quadratorum & rectangulorum quæ continentur segmentis rectarum sibi mutuo occurrentium, & sectiones conicas contingentium vel secantium; & traduntur insuper methodi ducendi rectas quæ sectiones contingant. Denique agitur de rectangulis contentis rectis quæ a punctis in sectione ducuntur ad trapezii inscripti latera, & cum iis datos angulos comprehendunt; & ostenditur duas sectiones conicas sibi invicem non occurrere in punctis pluribus quam quatuor.

LIBER

LIBER SECUNDUS.

PARAMETRI diametrorum sectionum definiuntur; & ostenditur quibus rectangulis æquantur quadrata ex rectis quæ diametro sectionis ordinatim applicantur. Inveniuntur axes Sectionum; & axes Ellipseos & Hyperbolæ cum aliis diametris comparantur. Definiuntur foci & directrices sectionum; deinde agitur de ratione quam in omni sectione recta a puncto sectionis ad focum ducta, habet ad perpendicularem ab eodem puncto ductam ad directricem, & ostenditur in Parabola hanc esse rationem æqualitatis; ostenditur vero rectam, a puncto Hyperbolæ ad focum ductam æqualem esse rectæ, ad directricem ductæ, asymptoto parallelæ. Probatur in Ellipsi summam, & in Hyperbola differentiam, rectarum, quæ a puncto sectionis ad focos ducuntur, æqualem esse axi transverso. Ostenditur quod recta Parabolam contingens æquales angulos comprehendit cum recta a contactu ad focum ducta & perpendiculari ad directricem; & quod recta Ellipsim aut Hyperbolam contingens æquales angulos comprehendit cum rectis a contactu ad focos ductis. Tractatur deinde de variis rectis per focos sectionum transeuntibus & de rectangulis contentis ipsarum segmentis. Traduntur methodi describendi sectiones conicas in plano ope instrumentorum. Ad finem hujusce libri ostenditur, quod si sectio sit in superficie coni recti, inveniri potest circuli circumferentia in eadem superficie ita posita ut latus coni inter ipsam & quodvis in sectione punctum interceptum, æquale sit rectæ ab eodem puncto ad focum sectionis ductæ; & quod intersectio plani istius circuli cum plano sectionis erit ipsius directrix.

LIBER

LIBER TERTIUS.

IN hoc libro agitur de ratione quam habent inter ſe parametri diametrorum Parabolæ; & traduntur quædam affectiones Parabolæ [illegible] aliarum ſectionum affectionibus minus affines videantur. Agitur etiam de Quadratura Parabolæ & de ſegmentis Parabolicis inter ſe comparatis.

LIBER QUARTUS.

DE parallelogrammis circa diametros conjugatas Ellipſeos aut Hyperbolæ deſcriptis; & in hoc libro agitur etiam de æqualitate aliorum parallelogrammorum quæ Ellipſi aut Hyperbolis inſcribuntur vel circumſcribuntur. Oſtenditur ſummam quadratorum ex duabus diametris conjugatis Ellipſeos æqualem eſſe ſummæ quadratorum ex axibus; & in Hyperbola oſtenditur differentiam quadratorum ex duabus diametris conjugatis æqualem eſſe differentiæ quadratorum ex axibus. Agitur de diametris conjugatis Ellipſeos inter ſe æqualibus. Traditur nova methodus inveniendi diametros conjugatas Ellipſeos & Hyperbolæ quæ datos angulos comprehendant, & inveniendi interſectionem rectæ poſitione datæ cum Ellipſi aut Hyperbola. Tractatur de ſectoribus & trapeziis Hyperbolicis. Comparatur Ellipſis cum circulo circa axem ejus deſcripto.

LIBER QUINTUS.

TRACTATUR de affectionibus sectionum conicarum similium; & de rectis quae a sectionibus harmonice secantur. Ostenditur quod duae rectae sectionem vel oppositas sectiones contingentes concurrent ad rectam positione datam, cum recta ipsarum contactus jungens transeat per punctum datum; & traduntur quaedam aliae affectiones quae omnibus sectionibus conveniunt. Agitur de sectionibus quae se invicem contingunt aut secant, & de circulis sectiones contingentibus. De maximis & minimis rectis quae, a punctis in axe datis, duci possunt ad sectionem. De circulis qui eandem curvaturam cum sectionibus habent. De sectionibus describendis quae per puncta data transeant & rectas positione datas contingant.

SECTIONUM CONICARUM

LIBER PRIMUS.

De Natura Coni ejusque Sectionis.

DEFINITIONES.

I. SI per quodvis punctum A, extra planum circuli BDEC, positum, utrinque infinite extendatur recta linea AE, & manente puncto A, per totam circuli peripheriam circumagatur; Binæ Superficies ejus motu genitæ appellantur sigillatim *Superficies Conicæ:* conjunctim vero, *Superficies oppositæ.* FIG. 1.

II. Solidum superficie conicâ & circulo BDE contentum, *Conus* dicitur.

III. Punctum A *Vertex Coni* dicitur.

IV. Circulus BDE, *Basis Coni.*

V. Recta AE, per verticem coni & punctum in peripheria basis ducta, *Latus Coni* dicitur.

VI. Recta AC, per verticem & basis centrum C utrinque infinite producta, *Axis* dicitur.

VII. Si axis ad basim rectus fuerit, *Conus rectus* dicitur.

VIII. Si vero inclinatus fuerit, *Conus Scalenus* dicitur.

IX. Recta superficiei conicæ in uno puncto occurrens & utrinque producta cadens extra superficiem, *Contingens* dicitur; Recta vero superficiei vel superficiebus oppositis in duobus punctis occurrens, *Secans* dicitur.

Corollarium. Recta per quodvis punctum in utravis superficie & verticem ducta, tota est in eadem superficie; productaque ultra verticem est in superficie opposita.

X. Communis plani alicujus cum superficie conica intersectio, dicitur *Sectio Conica*.

PROPOSITIO I.

Planum quodvis transiens per verticem coni & secans peripheriam basis, secabit superficies oppositas in duabus rectis & in istis tantum.

NAM si a punctis, in quibus hocce planum occurrit peripheriæ basis, ducantur ad verticem duæ rectæ; erunt in plano secanti & (per Cor. præc.) in superficie coni, & ultra verticem productæ in superficie opposita: hoc est, planum secat superficies oppositas in hisce duabus rectis; Porro, cum intersectio hujusce plani cum plano basis secare nequit peripheriam basis in tribus punctis, patet quod planum secare nequit superficies oppositas in tribus rectis: ergo planum secat superficies solummodo in duabus rectis.

Cor. Communis intersectio alicujus plani per verticem ductæ cum superficie conica & basi, erit triangulum.

PROP

PROP. II.

Recta Linea ED conjungens bina quæcunque puncta E, D, in ſuperficie conica, modo non ſint in eadem recta per verticem tranſeunte, tota cadit intra ſuperficiem, producta vero utrinque extra eandem, & neutri ſuperficierum amplius occurrit. Contra, recta ED conjungens puncta, E, D, in oppoſitis ſuperficiebus modo non ſint in eadem recta per verticem tranſeunte, cadit extra utramque ſuperficiem, & utrinque producta intra utramque cadit, neutrique earum amplius occurrit. Fig. 2. Fig. 3.

NAM per puncta E, & D, ductis coni lateribus AEC, & ADB, planum per has rectas tranſiens non occurrit ſuperficiei vel ſuperficiebus oppoſitis niſi in rectis AEC, ADB, unde Recta DE non occurrit ipſis, niſi in punctis D, E.

In priore vero caſu planum anguli DAE, & proinde recta DE, eſt intra ſuperficiem conicam; ideoque producta utrinque extra eandem cadit. Fig. 2.

In poſteriore caſu planum anguli DAE & proinde recta DE eſt extra utramque ſuperficiem oppoſitam; & igitur DE utrinque producta cadet intra ſuperficies oppoſitas. Fig. 3.

Si puncta D, E, ſint in eadem recta per verticem tranſeunte, recta ipſa conjungens (per Cor. ad. def.) erit tota in ſuperficiebus conicis.

PROP. III.

Si recta DE peripheriam baſis coni contingat in puncto D, & a coni vertice A ducatur ad contactum recta AD; planum ADE per utramque rectam productum ſuperficiei conicæ ſolummodo in recta AD occurrit; hujuſmodi vero occurſus, *Contactus* dicitur. Fig. 4.

A 2 Nam

NAM recta AD tum ſuperficiei conicæ, tum plano ADE communis eſt, cum vero præter D quodvis aliud punctum in baſis peripheria, puta F, ſit extra rectam DE, erit etiam præter DA quævis alia recta FA in ſuperficie conica, extra planum ADE, unde liquet propoſitum.

Cor. 1. Hinc & ex defin. 1. liquet planum ADE productum ſuperficiem oppoſitam in AD producta contingere.

Cor. 2. Hinc etiam patet methodus ducendi planum quod ſuperficiem conicam in data recta AD contingat; nempe ductâ in plano baſis rectâ DE ejus peripheriam in D contingente, actoque per AD, DE plano ADE, hoc ſuperficiem in recta AD continget.

Cor. 3. Si quævis recta ED ſuperficiem conicam in puncto D contingat, & a vertice ducatur AD; planum ductum per AD, DE, ſuperficiem continget. Nam per verticem A ducatur, in plano ADE, recta AG parallela ipſi ED, hæc omnibus lateribus coni in vertice occurrit: ergo ſi quodvis aliud latus coni præter AD, eſſet in plano ADE, recta ED ipſi AG parallela, iſti lateri neceſſario occurreret, ac proinde ED occurreret ſuperficiei conicæ in duobus lateribus contra hypotheſin: Ergo planum ADE, niſi in AD, ſuperficiei non occurrit.

Cor. 4. Præter ADE aliud planum ſecundum rectam AD ſuperficiem conicam non contingit. Nam interſectio ejus cum plano baſis ſecabit peripheriam ejus. Unde & planum ipſum ſuperficiei conicæ occurret in duabus rectis (per Prop. 1.) et ergo eam non continget.

PROP. IV. PROBL. I.

Fig. 5, 6. Per rectam AC per coni verticem extra ſuperficiem ejus utcunque ductam, planum ducere, quod ſuperficiem conicam contingat.

PER

PER AC agatur utcunque planum ſecans baſim in GH cui recta AC (cum in eodem ſit plano) occurret, vel erit parallela; primo occurrat ei in E; & a puncto E ex utravis parte ipſius EGH ducatur recta ED baſis peripheriam contingens; connexâ AD, erit ADE planum quæſitum; tranſit enim per AC, & (per præced.) ſuperficiem contingit. Secundo, ſit AC parallela ipſi GH; ducatur MD baſis diameter ipſi GH perpendicularis peripheriæ occurrens in D, per D ducatur DE baſim contingens, erit parallela ipſi GH ac proinde ipſi AC, tum connexâ AD, erit ADE planum quæſitum; nam ob parallelas AC et DE erit AC in plano ADE & hoc planum ſuperficiem conicam continget (per præced.) Fig. 5. Fig. 6.

Cor. Liquet bina tantum plana per AC tranſeuntia ſuperficiem conicam contingere; ex utraque parte ſcilicet plani AGH, unum.

PROP. V.

Recta quævis ED, cuivis lateri coni AB parallela (modo non ſit in plano ſuperficiem in AB contingente) uni ſuperficierum oppoſitarum idque in unico puncto E occurrit; hoc eſt, ex una parte, tota eſt extra utramque ſuperficiem, et ex altera, tota intra illam in qua ſitum eſt punctum E. Fig. 7.

PLANUM per parallelas AB, ED, ſecet ſuperficies in *c* AC; hoc planum non occurrit ſuperficiebus, niſi in rectis AB et *c* AC; rectaque ED in hoc plano (ob paralleliſmum) non occurrit rectæ AB, neceſſario tamen occurrit rectæ *c* AC alicubi in E & manebit ex una parte puncti E intra angulum BAC, ex alterâ intra angulum qui eſt huic deinceps; unde conſtat Prop.

Cor. Liquet planum per DE tranſiens et plano ſecundum AB ſuperficiem conicam contingenti parallelum, ſuperficiei oppoſitæ non occurrere.

PROP.

PROP. VI.

Fig. 8. Omnis recta EF, parallela cuivis rectæ AD, per verticem A ductæ, atque intra ſuperficies conicas cadenti, utrique
Fig. 9. ſuperficiei ſemel occurrit alicubi in E, F. Omniſque recta EF ducta per quodvis punctum P intra utramvis ſuperficiem, et parallela cuivis rectæ AD per verticem ductæ et extra ſuperficies cadenti, eidem ſuperficiei alicubi occurrit in E, F, punctis.

PER AD et rectam EF tranſeat planum ſecans conicas ſuperficies in BA*b*, CA*c*, quod ſemper fieri poſſe ſatis manifeſtum eſt; cum in priori caſu AD cadit intra angulum BAC, recta EF, quæ eſt ipſi AD parallela & in eodem plano cum angulo BAC, neceſſario lateribus ejus AC, AB occurret, ſcilicet ipſi AC in E, & AB productæ in ſuperficie oppoſita in F. Cum autem in poſteriori caſu AD cadit extra angulum BAC, recta EF ei parallela ducta per punctum P, intra hunc angulum, neceſſario occurret ipſis AC, AB, alicubi in E, F, hoc eſt occurret ipſi ſuperficiei intra quam ſumitur P, in E, F punctis.

Cor. I. Hinc & ex Prop. 2. liquet rectam lineam ſuperficiei conicæ vel ſuperficiebus oppoſitis in tribus punctis non occurrere.

Cor. II. Si recta ducatur parallela cuivis rectæ EF occurrenti ſuperficiebus oppoſitis; ipſa quoque occurret ſuperficiebus oppoſitis. Nam ſi per verticem A ducatur recta AD parallela ipſi EF patet eam cadere intra ſuperficies conicas; ergo quævis recta parallela rectæ EF erit parallela rectæ per verticem ductæ et intra ſuperficies cadenti, & proinde ſuperficiebus oppoſitis occurret.

Cor. III. Cum recta EF jungit puncta duo in eadem ſuperficie, recta AD huic parallela per verticem ducta cadet extra ſuperficies; nam manifeſtum eſt eam cadere ſemper extra angulum BAC, cujus lateribus recta EF occurrit.

Cor.

Cor. IV. Omne planum transiens per hujusmodi rectam EF, in priori casu, secabit utramque superficiem; & in posteriori, si per AD transeat planum extra utramque superficiem cadens, planum per EPF huic parallelum, superficiem conicam intra quam punctum P sumptum est secabit per totum ejus ambitum, & superficiei oppositæ non occurret.

PROP. VII.

Si alterutra superficierum oppositarum secetur plano GHF basi parallelo, erit sectio EGFL, circuli circumferentia cujus centrum erit in axe coni. Fig. 10.

SIT C basis centrum & AC axis coni, secetur conus utcunque per axem duobus planis facientibus triangula ABD, ATK, quæ (si opus producta) occurrant plano GHF in rectis GHL, EHF; ob plana parallela erunt triangula AHF, ACK, uti etiam AHL, ACD similia: quare erit HL ad CD, ut AH ad AC, & erit etiam HF ad CK, in eadem ratione, unde (alternando) erit HL ad HF, ut CD ad CK, sed CD et CK æquales sunt, ergo æquales sunt HL, HF. Pari modo ostendi potest duas quasvis alias rectas ut HG, HE, ductas a puncto H ad sectionem EGFL esse æquales ergo ista sectio est circuli circumferentia, & (9. 3.) centrum ejus H est in axe coni ut patet.

Cor. I. Hinc patet quod si hujusmodi sectionis diameter ducatur, per axem coni transibit; & contra si recta in plano hujusmodi sectionis ducta, transeat per axem coni, erit diameter sectionis.

Cor. II. Hinc etiam liquet, quod quivis circulus basi parallelus pro basi coni haberi potest.

PROP.

PROP. VIII.

FIG. 11. Si conus ſcalenus ABCL ſecetur plano per axem ad baſim recto, faciente triangulum ABL; & ab ejus angulo verticali BAL ſecetur triangulum ADT ſimile triangulo ABL, ſed ſubcontrarie poſitum, hoc eſt, ut angulus ATD ſit æqualis angulo ABL; & ſecetur iterum conus plano per DT recto ad planum trianguli ABL: ſectio DKTF facta in ſuperficie conica erit circuli circumferentia.

SIT recta MN, communis interſectio plani DKTF cum plano baſis; a quovis puncto K, in linea DKTF ducatur KGF parallela ipſi MN occurrens DT in G, per G ducatur EH in plano ABL parallela ipſi BL, tunc planum tranſiens per KGF, EGH, erit parallelum baſi (15. 11.) ac proinde ad planum ABL rectum; & ejus interſectio cum ſuperficie coni erit circulus cujus diameter eſt EGH (per præced. & coroll. 1.). propter utriuſque ſectionis planum, ad planum trianguli ABL rectum, erit eorum interſectio KGF perpendicularis ad ABL planum (19. 11.) & proinde ad utramque rectam EH, DT; ergo (propter circulum) quadratum ex KG, æquale eſt rectangulo EGH; poſiti autem fuerunt anguli ATD & (ABL ſive) AEH æquales, & æquales ſunt anguli verticales ad G, & proinde æquales ſunt reliqui anguli EDG, GHT, ergo ſimilia ſunt triangula EDG, GHT; ergo erit DG ad EG, ut GH ad GT; & ergo rectangulum DGT æquale eſt rectangulo EGH, hoc eſt, quadrato ex KG. Ergo punctum K, eſt in circumferentia circuli circa diametrum DT in plano DGK deſcripti; nam aliter rectangulum DGT æquale eſſet quadrato rectæ majoris ipſâ KG vel minoris eâ contra quod jam fuit probatum. Pari, modo, idem oſtendi poteſt de quovis alio puncto in ſectione DKTF quæ eſt igitur circuli circumferentia. Hujuſmodi ſectio dicitur *ſectio ſubcontraria.*

PROP.

PROP. IX.

Si in superficie conica a Plano quovis basi non parallelo fiat sectio DKTF quæ sit circuli circumferentia, erit eadem sectio subcontraria. FIG. 11.

SECETUR superficies conica duobus planis basi parallelis facientibus circulos EKHF, OPQR, & intersecantibus planum DKTF in rectis KF, PR quæ erunt parallelæ (per 16, 11.) ducantur EH, OQ diametri horum circulorum perpendiculares rectis KF, PR iisque occurrentes in punctis G, S, ipsæ EH, OQ erunt inter se parallelæ (convers. 10. 11.) & rectas KF, PR bifariam secabunt in G, S (3. 3.) & transibunt per axem coni per (cor. 1. 7. hujus) ergo planum AOEBLHQ transit per axem Coni; sit recta DT ejus intersectio cum plano circuli DKTF; cum igitur DT transit per G, & S, & proinde bifariam secat rectas KF, PR circulo DKTF terminatas, est istius circuli diameter & his rectis perpendicularis, ut constat ex 3, 3. quoniam ergo recta KF est perpendicularis rectis DGT, EGH erit perpendicularis ad planum ABL per hasce rectas transiens; ergo (per 18, 11.) plana circulorum DKTF EKHF, & proinde planum basis, erunt recta ad planum ABL per axem coni transiens; sed propter eosdem circulos, erit utrumque rectangulum EGH, DGT æquale quadrato ex KG, & ergo inter se æqualia; ergo erit DG ad EG, ut GH ad GT, & anguli verticles ad G sunt æquales, ergo similia sunt triangula DGE, HGT, (per 6, 6.) & ergo angulus ATD æqualis est angulo AEH, hoc est, angulo ABL; ergo ex præcedenti, sectio DKTF est sectio subcontraria.

COR. Hinc sectio conica, quæ nec sit sectio subcontraria, nec facta plano basi parallelo, non erit circuli circumferentia.

PROP. X.

Fig. 12, 13. Occurrant ſibi invicem in puncto P duæ rectæ, quarum una ſit plano baſis coni parallela, altera vero parallela rectæ poſitione datæ & ſecanti planum baſis: prout ambæ rectæcontingant, aut ſecent, vel earum una contingat, & altera ſecet, ſuperficiem conicam vel ſuperficies oppoſitas; Quadrata ſegmentorum contingentium, vel rectangula contenta ſecantium ſegmentis, inter rectarum occurſum, & puncta quibus occurrunt ſuperficiei vel ſuperficiebus, erunt ſemper ad ſe invicem in eadem ratione ubicunque cadat punctum P rectarum occurſus. *Rectam vero dico parallelam plano, cum in iſto plano duci poteſt recta ei parallela.*

SIT Conus ABC cujus baſis eſt circulus ASC, & ſit BM recta poſitione data, ducta ſcilicet a vertice coni B ad punctum quodvis datum M in plano baſis, (non autem in ejus peripheria) & a puncto M ducatur quævis recta ſecans peripheriam baſis in punctis K, L; occurrant ſibi invicem in puncto quovis P duæ rectæ, quarum una POG vel PT ſit baſi coni parallela & ſecet ſuperficiem in punctis O, G, vel ipſam contingat in T, & altera PEF ſit parallela rectæ BM; primo ſecet hæc recta PEF eandem ſuperficiem vel ſuperficies oppoſitas in punctis E, F; erit rectangulum EPF, ad rectangulum OPG vel quadratum ex PT, ut quadratum ex BM ad rectangulum KML, ubicunque cadat P rectarum occurſus.

Agatur enim per rectam POG planum baſi Coni parallelum conficiens circulum DOHG, & per parallelas BM, PEF tranſeat planum occurrens ſuperficiebus in rectis QEA, RFC, plano baſis in recta MCA, & plano circuli DOHG in recta DPH; rectæ MCA, DPH erunt parallelæ (per 16, 11.) ergo ſimilia ſunt triangula EPD, BMA, ut & triangula FPH, BMC, & inde erit EP

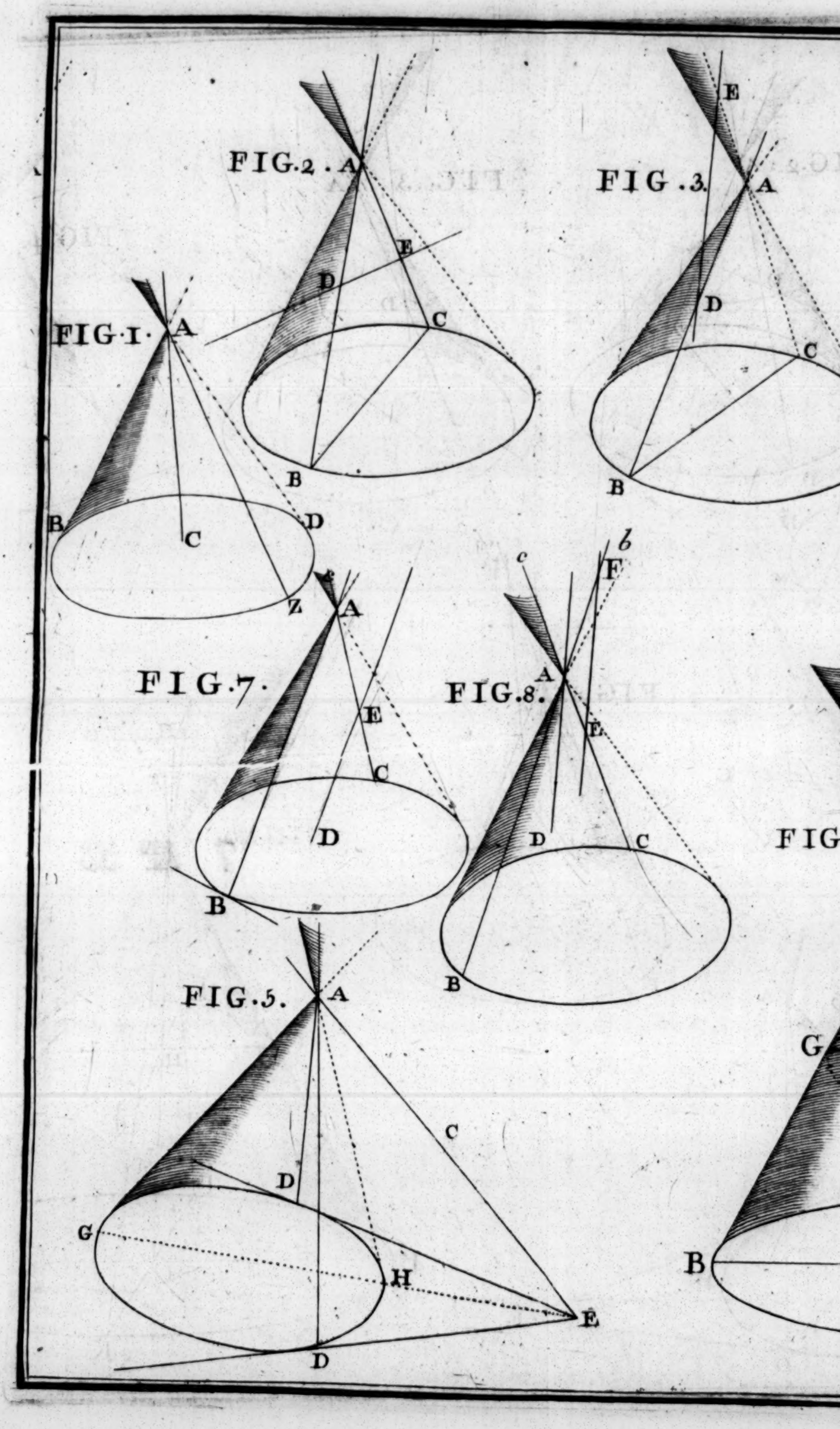


FIG.1.
FIG.2.
FIG.3.
FIG.5.
FIG.7.
FIG.8.
FIG

TAB·I·
Page·10·

FIG.4.

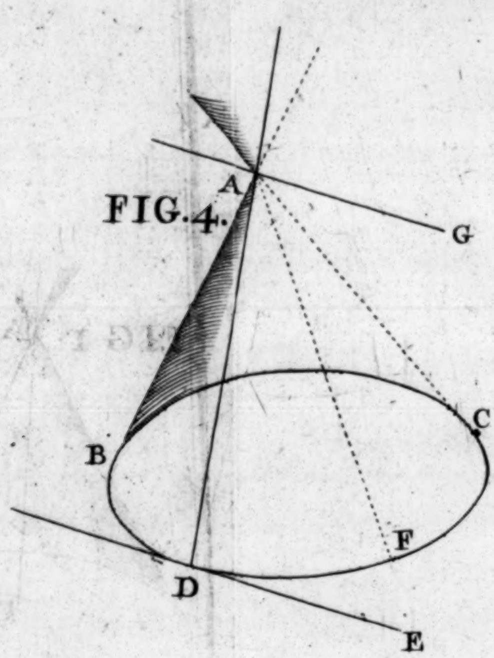


FIG.6.

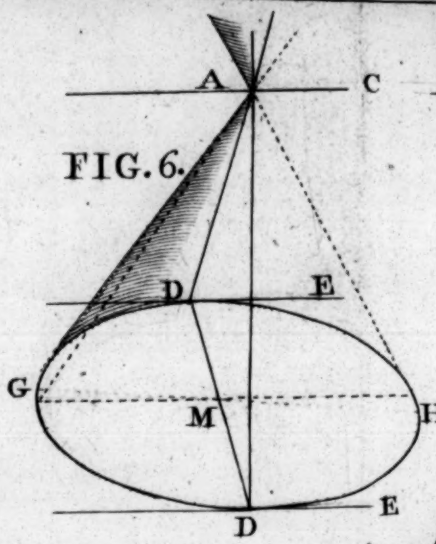


FIG.9.

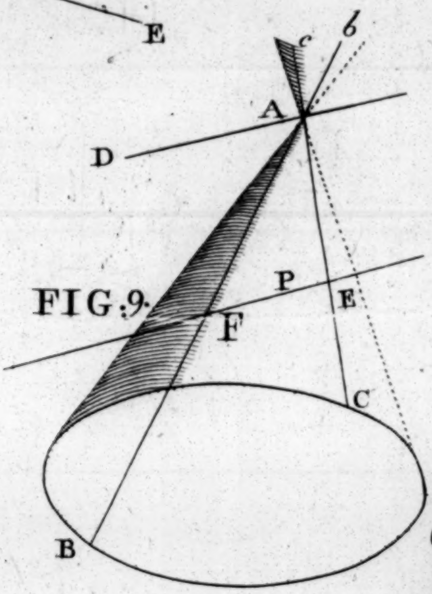


FIG.10.

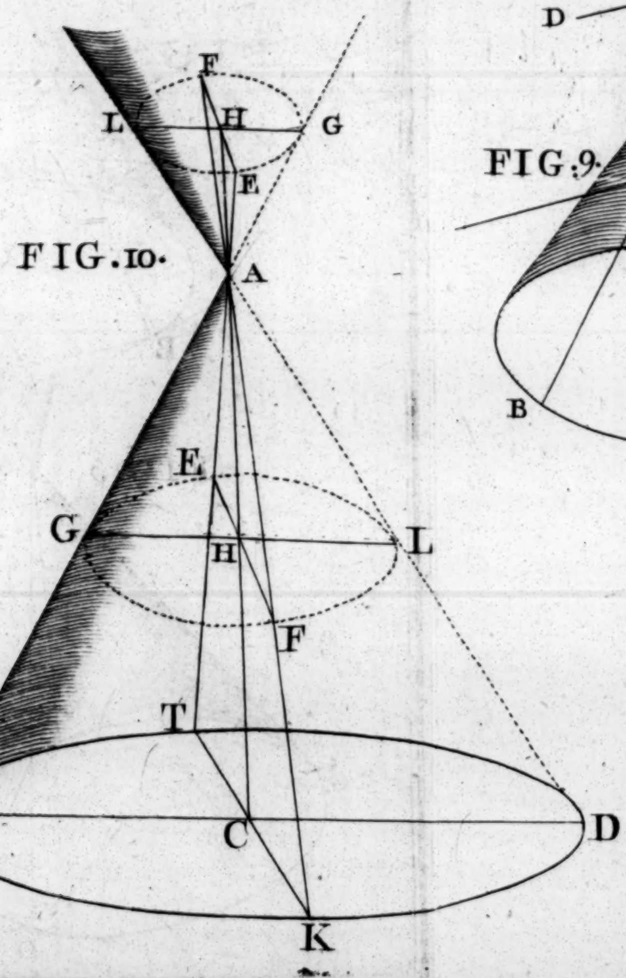
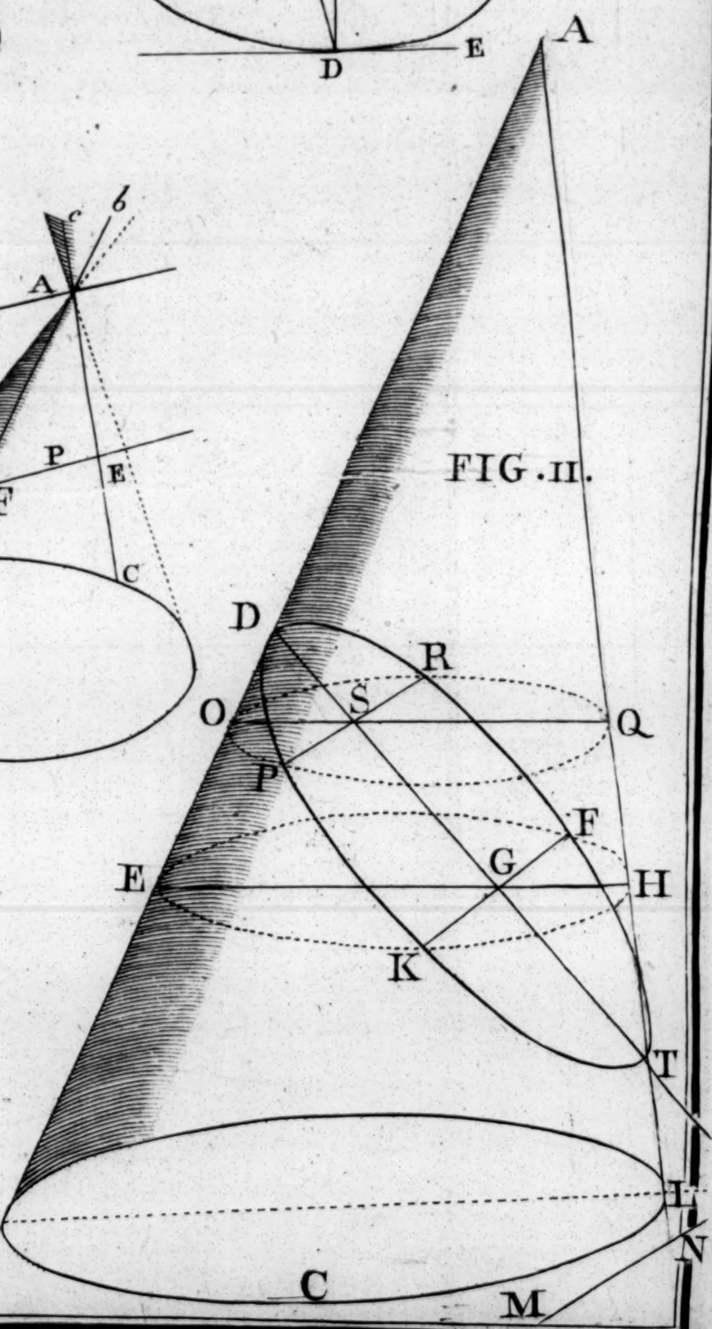


FIG.11.



7 AP 53

EP ad DP, ut BM ad AM, & erit PF ad PH, ut BM ad MC, ergo (ducendo antecedentes unius ordinis proportionalium in antecedentes alterius & consequentes in consequentes) erit rectangulum EPF ad rectangulum DPH, ut quadratum ex BM ad rectangulum AMC (per 23. 6.) sed propter DOHG & ASC circulos, erit rectangulum DPH æquale rectangulo OPG vel quadrato ex PT, & rectangulum AMC æquale rectangulo KML (per 35, & 36. 3.) est igitur rectangulum EPF ad rectangulum OPG vel quadratum ex PT, ut quadratum ex BM, ad rectangulum KML, ubicunque cadat punctum P rectarum EF, OG occursus.

Si vero recta EF ipsi BM parallela, occurrat in P rectæ PB basi coni parallelæ & per verticem coni transeunti; eodem prorsus modo (ob similia triangula EPB, BMA; & FPB, BMC) ostendetur rectangulum EPF esse ad quadratum ex PB, ut quadratum ex BM ad rectangulum AMC, hoc est, KML.

Secundo, cæteris manentibus ut prius, contingat nunc recta PF superficiem in F; per contactum F ducatur latus coni occurrens basi in N; planum transiens per parallelas PF, BM continget superficiem in recta BFN (cor. 3. 3. hujus) & intersectio ejus MN cum plano basis, continget basim in N; sit recta PT intersectio ejusdem plani cum plano circuli OTG in quo est punctum P, hæc recta continget circulum OTG in T puncto scil. in recta BFN, & erit parallela ipsi MN (per 16. 11.) ergo propter similia triangula FPT, BMN, quadratum ex PF erit ad quadratum ex PT vel rectangulum OPG, ut quadratum ex BM ad quadratum ex BN, sive, rectangulum KML. Q. E. D. Fig. 14.

MN

PROP. XI.

Si duæ rectæ sibi invicem occurrentes sint duabus rectis positione datis semper parallelæ; prout ambæ contingant, aut secent, vel earum una contingat, & altera secet, superficiem conicam vel superficies oppositas; quadrata ex contingentium segmentis, vel rectangula contenta secantium segmentis, inter rectarum occursum & puncta quibus occurrunt superficiei vel superficiebus, erunt ad se invicem in eadem ratione ubicunque cadat rectarum occursus.

Cas. 1. QUANDO utraque recta est basi coni parallela, planum per eas transiens erit plano basis parallelum (15. 11.) et proinde secabit alterutram superficiem in circumferentia circuli; ideoque ambæ rectæ contingent, vel secabunt, vel una continget, altera secabit, eundem circulum, & igitur quadrata ex contingentium segmentis, vel rectangula contenta secantium segmentis, inter rectarum occursum & puncta quibus superficiei occurrunt, erunt ad se invicem in ratione æqualitatis per 35, & 36. 3.

Cas. 2. Quando una rectarum sibi invicem occurrentium est parallela rectæ positione datæ secanti planum basis, & altera est parallela rectæ positione datæ in plano basis ductæ, hæc recta erit semper parallela ipsi plano basis & proinde hic casus propositionis constat ex propositione præcedenti.

Cas. 3. Quando neutra rectarum sibi invicem occurrentium est plano basis parallela; per earum occursum ducatur recta plano basis parallela, secans alterutram superficiem, vel fortasse per verticem coni transiens; tum prout utraque recta basi non parallela contingat vel secet superficiem, vel superficies oppositas, quadratum ex segmento vel rectangulum ex ejus segmentis habebit ad quadratum ex segmento vel ad rectangulum ex segmentis rectæ

basi

basi parallelæ, eandem semper rationem (per prop. præc.) & proinde hæc quadrata vel rectangula, ex segmentis rectarum quæ basi non sunt parallelæ, habebunt ad se invicem eandem semper rationem. Ut constat ex 22. 5.

In hac & præcedenti propositione quando una rectarum sibi invicem occurrentium per verticem coni transit, sumitur quadratum ex ejus segmento inter rectarum occursum & verticem, quasi ista recta foret contingens; quamvis cadat intra superficiem conicam.

PROP. XII.

Si duæ rectæ sibi invicem parallelæ occurrant cuivis rectæ lateri coni parallelæ; prout ambæ contingant, aut secent, vel earum una contingat, & altera secet, superficiem conicam vel superficies oppositas; quadrata ex contingentium segmentis, vel rectangula contenta secantium segmentis, inter superficiem vel superficies, & rectam cui occurrunt, erunt inter se ut segmenta istius rectæ inter ipsas parallelas, & punctum in quo superficiei conicæ occurrit.

SIT MBC conus, & sint rectæ EF, LN inter se parallelæ, et ponantur utcunque secare superficiem vel superficies in E, F et L, N punctis, & occurrant in punctis P, Q rectæ ST lateri coni *c*BC parallelæ et occurrenti superficiei in V; erit rectangulum EPF ad rectangulum LQN, ut PV ad QV. Fig. 15.

Nam per parallelas *c*BC et ST transeat planum iterum occurrens superficiebus in recta *m*BM, & per puncta P, Q ducantur in hoc plano rectæ MPC, DQH inter se parallelæ, occurrentes superficiei in M, C & D, H; tum (per præced.) erit rectangulum EPF ad rectangulum MPC, ut rectangulum LQN ad rectangulum DQH; ergo erit (alternando) rectangulum EPF ad LQN, ut rectangulum MPC ad DQH, hoc est, propter æquales PC, QH, (utpote opposita latera parallelogrammi,)

parallelogrammi) ut recta MP ad DQ, sive ob similia triangula ut ipsa PV ad QV; quod eodem modo ostendi potest de quadratis segmentorum parallelarum inter rectam ST & contactus, si una vel utraque earum esset contingens. Q. E. D.

PROP. XIII.

Contingant duæ rectæ sibi invicem parallelæ, superficiem, vel superficies oppositas, & in iis sumantur duo puncta a punctis contactus æquidistantia, si recta hæc puncta conjungens occurrat superficiei vel superficiebus; erunt ejus segmenta inter contingentes & superficiem vel superficies, æqualia.

Fig. 16, SINT rectæ EP, RQ parallelæ & contingant eandem superficiem vel oppositas superficies in E, R; sint puncta P, Q a punctis E, R æquidistantia, & ducatur PQ secans superficiem vel superficies oppositas in punctis F, G; erunt segmenta PF, QG æqualia.

Nam quoniam rectæ EP, RQ sunt parallelæ & eadem recta PQ ipsis occurrit, erit (per 11. hujus) quadratum ex EP ad rectangulum FPG, ut quadratum ex RQ ad rectangulum GQF, sed æqualia sunt quadrata ex EP & RQ (per hypoth.) ergo æqualia sunt rectangula FPG & GQF; bifariam ergo secetur recta FG in O; et cum puncta F, G sint in eadem superficie, æqualibus rectangulis FPG, GQF addantur æqualia quadrata ex OF et OG & summæ id est (per 6. 2.) quadrata ex OP, OQ erunt æqualia; et cum F, G sint in superficiebus oppositis, ab æqualibus quadratis ex OF, OG auferantur æqualia rectangula FPG, GQF & reliqua id est (per 5. 2.) quadrata ex OP, OQ erunt æqualia: ergo ipsæ rectæ PO, QO in utroque casu sunt æquales; sed æquales sunt ipsæ FO, GO ergo æqualia sunt segmenta PF, QG.

Si vero recta PQ contingat superficiem in puncto V; erit ut prius (per 11 hujus) quadratum ex EP, ad quadratum ex VP, ut quadratum

quadratum ex RQ. ad quadratum ex VQ: ergo æqualia ſunt quadrata ex VP, VQ. et ergo ipſa ſegmenta VP, VQ ſunt æqualia. Q. E D.

Cor. Contingant rectæ parallelæ PF, QH ſuperficiem conicam in punctis E, R, jungatur ER & per punctum in ea O ducatur recta ipſis PF, QH parallela, occurrens ſuperficiei in duobus punctis M, N; ſi per hæc puncta M, N, ducantur duæ rectæ ipſi ER parallelæ & occurrentes ipſis PF, QH in punctis F, H & P, Q, hæ rectæ ſimul occurrent ſuperficiei iterum ut in punctis G, L, vel ſimul ipſam contingent in punctis M, N. Per conſtructionem (& 34. 1). contingentes EF, RH ut & EP, RQ ſunt æquales, ſi igitur recta FMH ſuperficiei occurrat in punctis M, G erunt FM, GH æquales (per hanc prop.) & ſi recta PNQ ponatur contingere ſuperficiem in N erunt PN, NQ æquales, ergo, propter parallelas PF, NM, QH, erunt FM, MG æquales, quod eſt abſurdum; ergo cum recta FMH ſuperficiei occurrat in duobus punctis, recta PNQ non continget ſuperficiem in N & proinde ei iterum occurret, ideoque hæ rectæ FMH, PNQ vel ſimul ſecabunt ſuperficiem conicam, vel eam ſimul contingent. Fig. 17. MH

PROP. XIV.

Recta linea conjungens bina puncta contactus parallelarum contingentium, biſariam ſecat omnes rectas quibus occurrit, quæ ſunt iſtis contingentibus parallelæ & utrinque ab alterutra ſuperficierum terminatæ.

SINT rectæ EP, RQ, ſibi invicem parallelæ, et contingant eandem ſuperficiem, vel ſuperficies oppoſitas, et ducatur ER conjungens puncta contactus; tum ſit recta MN ipſis EP, RQ parallela & occurrat ipſi ER (ſi opus productæ) in puncto O, & ſit terminata ſuperficie conicâ in M, N, punctis; erunt ſegmenta MO & ON, æqualia. Fig. 17, 18.

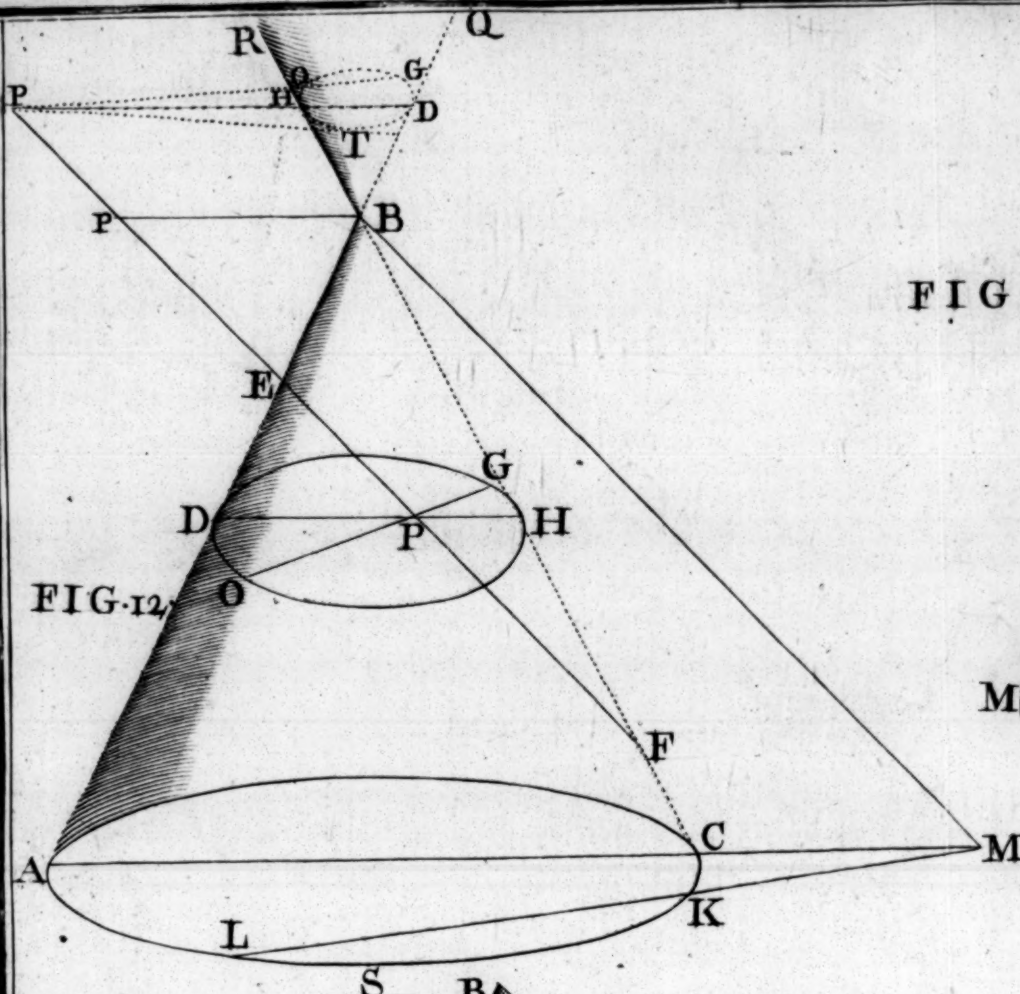
æqualia. Ducantur enim per puncta M, N, duæ rectæ ipsi ER, parallelæ, & primo, ambæ occurrentes eidem vel oppositæ superficiei iterum in G, L (per Cor. præc.) et contingentibus parallelis in punctis F, H et P, Q; tum (propter parallelogramma) erunt rectæ MF, NP æquales, ut et FH, PQ & etiam contingentes EP, RQ, ergo (per præced.) erunt rectæ NP, QL æquales, et eodem modo ostendetur MF, HG esse æquales; ergo æquales sunt PL, FG & proinde æqualia sunt rectangula NPL, MFG, sed (per 11 hujus) rectangulum NPL est ad quadratum ex PE, ut rectangulum MFG ad quadratum ex EF; ergo æqualia sunt quadrata ex EP et EF, ergo ipsæ rectæ FE, EP sunt æquales, et ergo, propter parallelas, erunt segmenta MO, ON æqualia.

Fig. 17. Cum puncta E, R sunt in oppositis superficiebus, rectæ per M, N ductæ ipsi ER parallelæ, necessario occurrent superficiei oppositæ per Cor. 2. 6 hujus. Cum autem puncta E, R sunt in eadem superficie, si una rectarum, quæ per M, N ductæ sunt ipsi ER parallelæ, contingat hanc superficiem in puncto M, eam continget altera recta in N (per Cor. præc.) occurrant vero hæ rectæ contingenti EPF in X, V punctis; tum (propter parallelogramma) erunt contingentes MX, NV æquales, ergo (per præced.) erunt contingentes XE, EV æquales, ergo, propter parallelas, erunt segmenta MO, ON, æqualia. Q. E. D.

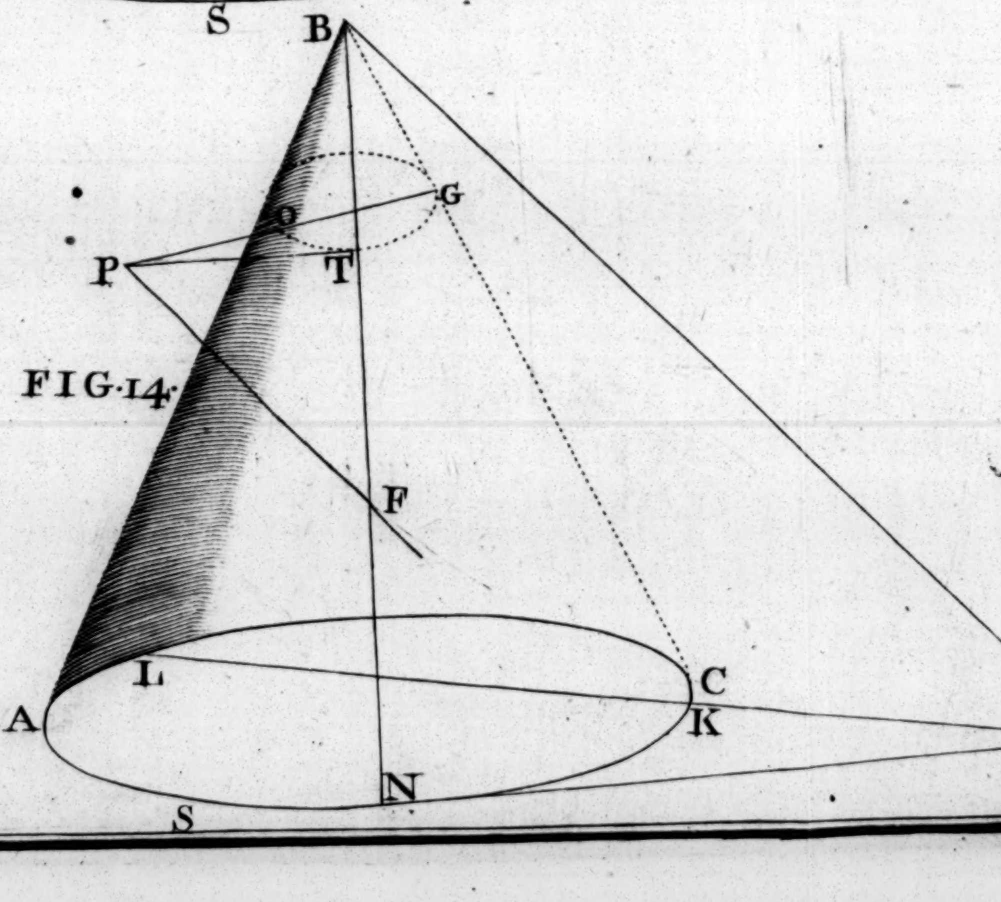
DEFINITIONES.

Fig. 19. XI. Si planum ADE superficiem conicam secundum rectam AD contingat, et superficies secetur plano ipsi ADE parallelo, sectio MVN, dicitur *Parabola*.

XII.



FIG·12.



FIG·14.

FIG·15.

TAB. 2.
Page. 16.

15.

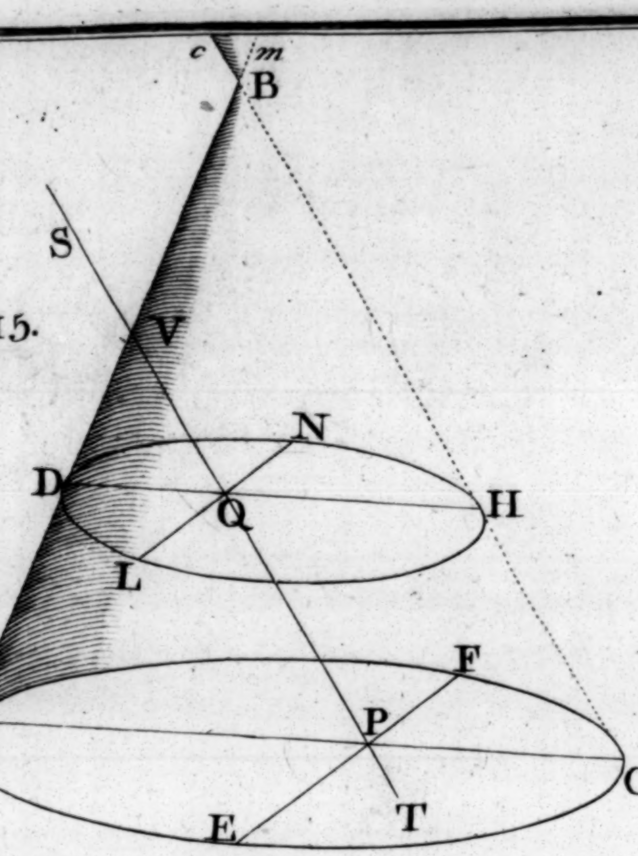


FIG. 13.

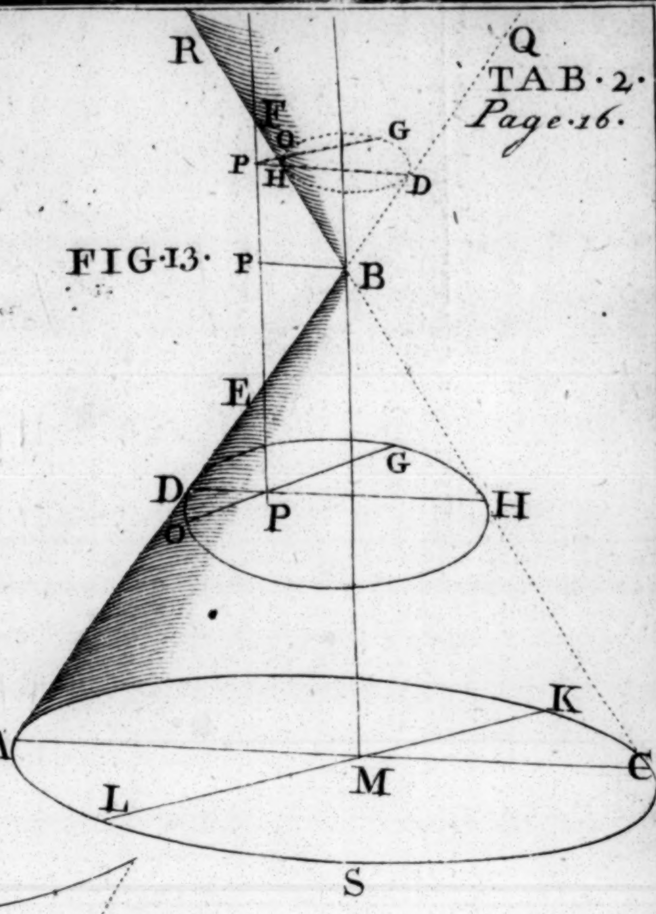
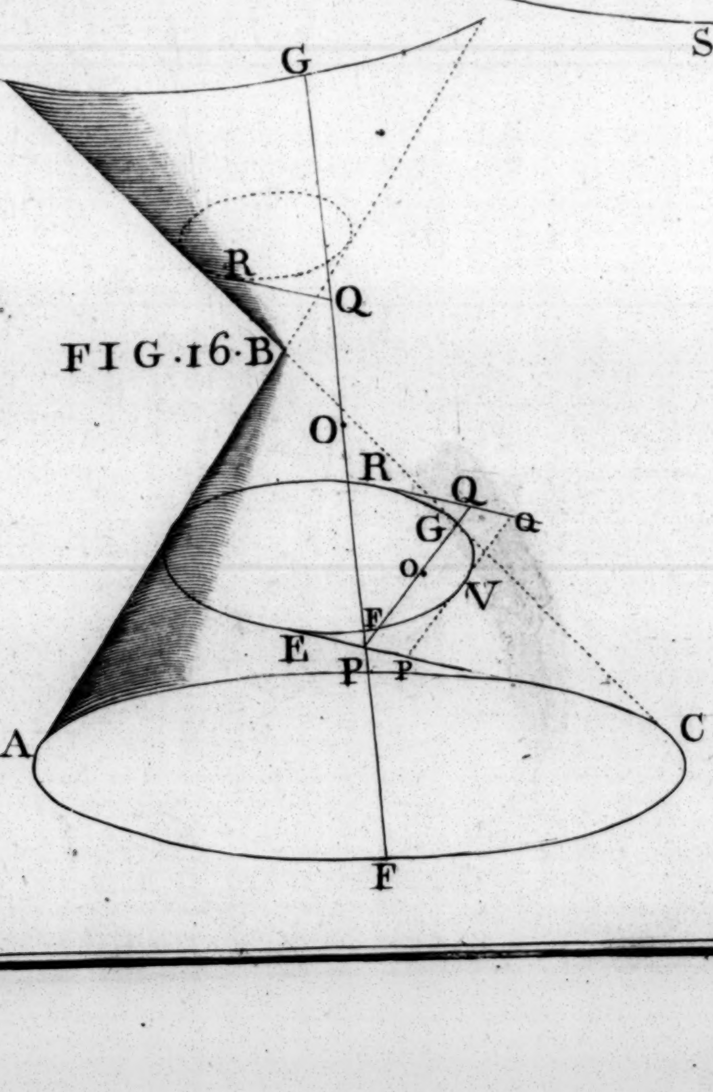
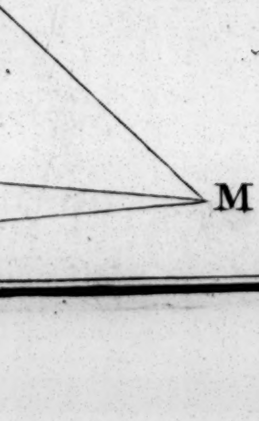


FIG. 16.





7 AP 53

XII. Si per verticem & extra superficies conicas transeat planum DAE, nec plano basis nec plano sectionis subcontrariæ parallelum, et superficierum alterutra secetur plano XVLT ipsi DAE parallelo; sectio MUNL, dicitur *Ellipsis*. FIG. 20.

XIII. Si per verticem A coni BAG transeat planum secans superficies in rectis *d*AD, *e*AE, et superficies conica secetur plano XVM ipsi EAD parallelo; sectio MVN, dicitur *Hyperbola*. Et quoniam hoc planum secans, necessario occurrit superficiei oppositæ, ibi faciet sectionem *m*L*n* ejusdem generis ac nominis cum priori; & hæ duæ sectiones conjunctim, dicuntur *Sectiones Oppositæ*. FIG. 21.

XIV. Planum ADE per verticem coni transiens & plano cujusvis sectionis parallelum, dico *Planum Verticale* istius sectionis.

XV. Quævis recta LV ducta in plano Parabolæ, parallela rectæ AD secundum quam planum verticale contingit superficiem; dicitur *Diameter Parabolæ*, & punctum V in quo sectioni occurrit, dicitur ejus *Vertex*. FIG. 19.

XVI. Punctum, intra Ellipsim, aut inter sectiones oppositas, in quo bifariam secatur omnis recta per ipsum ducta, et Ellipsi, aut sectionibus oppositis utrinque terminata, dico *Centrum* Ellipseos, aut Hyberbolæ vel sectionum oppositarum.

XVII. Quamvis rectam, per centrum Ellipseos aut Hyperbolæ ductam, & occurrentem Ellipsi aut sectionibus oppositis in duobus punctis, dico *Diametrum* Ellipseos, aut *Diametrum Transversam* Hyperbolæ vel sectionum oppositarum. Et puncta in quibus diameter occurrit Ellipsi, aut sectionibus oppositis, dicuntur *Vertices* ejus.

XVIII. Quævis recta per centrum Hyperbolæ ducta, et bifariam secans rectam per centrum non transeuntem & terminatam sectionibus oppositis, dicitur *Diameter Secunda* Hyperbolarum.

XIX. Duæ diametri, quarum utraque bifariam secat omnes rectas Ellipsi, Hyperbolâ, vel Hyperbolis oppositis terminatas & alteri parallelas, dicuntur *Diametri Conjugatæ* Ellipseos aut Hyperbolæ.

XX. Recta quævis, per centrum non transiens, sectione conicâ vel sectionibus oppositis utrinque terminata, & a diametro bifariam secta, dicitur *Ordinatim Applicata* diametro, vel simpliciter *Ordinata* huic diametro: & sæpius dimidium hujusce rectæ dicitur *Ordinata*.

XXI. Segmenta diametri inter ordinatam ejus & vertices, dicuntur *Abscissæ*.

XXII. Diameter sectionis conicæ, quæ ad angulos rectos ordinatas suas secat, dicitur *Axis*.

XXIII. Recta in plano sectionis conicæ ducta, occurrens sectioni in uno puncto, & utrinque producta extra ipsam cadens, dicitur sectionem in hoc puncto *contingere*; & ipsa recta, dicitur *Contingens*.

Si vero, in duobus punctis recta sectioni vel sectionibus oppositis occurrat; dicitur *Secans*.

Corollaria ad Definitiones præcedentes.

Cor. I. Cum quodlibet punctum sectionis conicæ sit in superficie conica, & duo quælibet puncta in oppositis sectionibus sint in oppositis superficiebus; patet omnem rectam lineam in plano sectionis conicæ ductam, quovis modo superficiei conicæ vel superficiebus oppositis occurrentem, eodem modo & in eodem puncto vel iisdem punctis sectioni conicæ vel sectionibus oppositis occursuram. Et contra, patet omnem rectam lineam quovis modo sectioni conicæ vel sectionibus oppositis occurrentem, eodem modo & in eodem puncto vel iisdem punctis superficiei conicæ vel superficiebus oppositis occursuram.

Cor. II. Recta linea conjungens bina quæcunque puncta in sectione conica, tota cadit intra sectionem, producta vero utrinque extra eandem cadit, & neque ei, nec oppositæ sectioni, occurrit iterum. Contra,

Contra, recta conjungens bina puncta in oppositis sectionibus, cadit extra utramque sectionem, producta vero utrinque, intra utramque transit, & neutri earum iterum occurrit. Constat hocce corollarium ex præcedenti & Propositione 2. hujus. Hinc, vel ex Cor. 1. 6. hujus, patet rectam lineam sectioni conicæ vel sectionibus oppositis in tribus punctis non occurrere.

Cor. III. Hinc, eadem recta oppositas sectiones contingere nequit.

Cor. IV. Hinc etiam, si recta ducatur in plano sectionum oppositarum, parallela rectæ jungenti bina puncta in oppositis sectionibus; ipsa necessario occurret oppositis sectionibus, ut constat ex Cor. 2. Prop. 6.

Cor. V. Omnes diametri alicujus Parabolæ sunt inter se parallelæ, & quævis recta ducta in plano parabolæ diametris parallela, erit ipsa diameter, ut constat ex definitione 15. & quævis diameter occurrit Parabolæ in unico puncto, & est, ex una parte, tota extra Parabolam, & ex altera, tota intra illam; ut constat ex Prop. 5. & Cor. 1. ad definitiones.

Cor. VI. Cum plana Parabolæ & Hyperbolæ superficiem conicam ad infinitum productam secent, patet hasce sectiones ad infinitum extendi posse, nec unquam in se redire, aut spatium claudere. Ellipsis vero, cum conum ambit, in se revoluta spatium undique claudit.

Cor. VII. Omnis conisectio ipsum conum ambiens, est aut Circulus, aut Ellipsis. Nam si planum sectionis sit basi parallelum, aut subcontrarie positum, sectio erit Circulus, & si non, erit Ellipsis per Def. 12. & Cor. 9. hujus.

PROP. XV.

Si per punctum intra Parabolam ducatur recta diametros ſecans; neceſſario occurret Parabolæ in duobus punctis.

Fig. 19.

SIT conus BAD, & in ejus ſuperficie ſectio MVN Parabola, & planum ADE ejus planum verticale contingens ſuperficiem in recta AD, ſit recta LV diameter Parabolæ; per punctum P intra Parabolam, ducatur recta MN ſecans diametros, occurret Parabolæ in duobus punctis.

Nam per verticem coni A, ducatur in plano verticali, recta AF ipſi MN parallela; tum propter parallelas PN, FA & PL, AD, erunt anguli NPL, FAD æquales (10, 11.) ergo AF ſecabit rectam AD in qua ſola planum verticale ſuperficiei occurrit: ergo AF cadit tota extra ſuperficiem: ergo (per 6. huj.) recta MN, ipſi AF parallela, occurret ſuperficiei, intra quam ſumptum eſt P, in duobus punctis puta M, N; ergo in iiſdem punctis occurret ipſi Parabolæ per Coroll. 1. Def.

PROP. XVI.

Per quodvis punctum ſectionis conicæ, duci poteſt unica recta, quæ ipſam ſectionem in iſto puncto contingat.

Fig. 19.

SIT conus BAD, & in ejus ſuperficie, ſectio quævis conica MVN; in ea ſumatur punctum quodvis V, & per V, ducatur latus coni AVB, & per punctum B in quo latus AVB circumferentiæ baſis occurrit, ducatur BK baſim contingens; tum planum ABK ſuperficiem continget (Cor. 2, 3. huj.) & recta VX communis interſectio plani contingentis ABK, cum plano ſectionis, continget ſectionem in puncto V.

Nam

Nam recta VX eſt tota in plano ABK ſuperficiem contingente, & occurrit lineæ contactus in puncto V, ergo in hoc puncto contingit ſuperficiem. Sed recta VX eſt quoque in plano ſectionis MVN quam ergo continget in puncto eodem V (per. Cor. 1. Def.) Si nunc quævis alia recta, in plano ſectionis, præter VX, ponatur contingere ſectionem MVN in puncto V, in hoc puncto etiam contingeret ſuperficiem conicam: & cum hæc recta ſit extra planum ABK, planum per eam, & rectam AB, ductum, erit diverſum a plano ABK, & ſuperficiem in recta AB continget (per Cor. 3, 3. huj.) ergo duo plana contingerent ſuperficiem in eadem recta, contra Cor. 4, 3. hujus: ergo una tantum recta contingere poteſt ſectionem conicam in eodem puncto.

Cor. Hinc, recta quævis MN, ducta per punctum P intra ſectionem conicam, parallela cuivis contingenti VX; ſectioni in duobus punctis occurret.

Nam ſit recta AF communis interſectio plani contingentis ABK in quo eſt contingens VX, cum plano verticali ADE, erit (per 16, 11.) parallela contingenti VX, & proinde rectæ MN per P ductæ: Sed recta AF, quoniam ſit in plano contingente & a linea contactus AB diverſa, cadit tota extra ſuperficies; ergo recta per P ducta, occurret ſuperficiei, intra quam ſumptum eſt P, in duobus punctis, puta M, N, per 6. hujus: ergo ipſi ſectioni in iiſdem punctis occurret per Cor. 1. Def.

PROP. XVII.

Sit recta MN ſectione conicâ terminata; unica recta ipſi parallela, contingere poteſt ſectionem, ſi ſit Parabola; & ſi ſit Hyperbola, una tantum recta ipſi MN parallela, eam contingere poteſt, & una Hyperbolam oppoſitam; & ſi ſit Ellipſis, duæ rectæ ipſi MN parallelæ, eam contingere poſſunt. Fig. 19, 20, 21.

SIT enim ſectio MVN Parabola, a qua terminatur recta MN; & per verticem coni A ducatur in plano verticali, recta AF Fig. 19.

ipſi

ipsi MN parallela, quæ (per Cor. 3, 6. huj.) cadet extra superficies conicas, & quoniam recta AF sit in plano ADE superficiem contingente, transire potest per ipsam AF (per 4 huj.) alterum planum ABK, quæ superficiem contingat in recta quadam AB: hoc planum necessario secabit planum Parabolæ, puta in recta VX, hæc continget Parabolam in V (per præced.) & erit (16. 11.) parallela rectæ AF, & proinde ipsi MN Parabolâ terminatæ.

Si vero (manentibus jam positis) alia quævis recta YZ, parallela ipsi MN, ponatur contingere Parabolam; per verticem A & contactum Y ducatur latus coni; contingens YZ est (per hypoth.) parallela ipsi AF, & (per Cor. 3, 3. huj.) planum per has parallelas transiens continget superficiem in recta AY; sed hoc planum necessario erit diversum a planis contingentibus ADE, ABK; ergo tria plana superficiem contingentia, transirent per rectam AF, contra Cor. 4. hujus.

Fig. 20, 21. Sit nunc sectio MVN Ellipsis, aut Hyperbola, & *m*L*n* Hyperbola opposita, & sit MN Ellipsi aut Hyperbolâ terminata. Per verticem coni A ducatur, in plano verticali, recta AF ipsi MN parallela, cadens (per Cor. 4. 6. huj.) extra superficies, & per AF ducantur duo plana ABK, AGH contingentia superficies in rectis AVB, ALG, (per 4. huj.) cum hæc plana secant planum verticale ADE in recta AF, secabunt quoque planum Ellipseos, aut sectionum oppositarum, in duabis rectis, VX, LT, ipsi AF parallelis (16. 11.) sed hæ rectæ VX, LT contingunt Ellipsim, aut oppositas Hyperbolas (per præced.) & quoniam sunt parallelæ rectæ AF, erunt parallelæ ipsi MN:

Si nunc manentibus jam positis, quævis tertia recta parallela ipsi MN, ponatur contingere Ellipsim aut Hyperbolam, eodem modo, ut in priori casu, ostendi potest, tria plana superficiem contingentia transire per rectam AF, quod est absurdum per Cor. Prop. 4. hujus.

Cor.

Cor. I. Hinc patet, quod ſi quævis recta contingat Ellipſim, aut Hyperbolam, duci poteſt una alia recta quæ Ellipſim, aut oppoſitam Hyperbolam, contingat, & ſit priori contingenti parallela.

Cor. II. Hinc etiam patet, quod ſi a puncto Parabolæ, ducatur recta parallela cuivis contingenti, Parabolæ iterum occurret; nam ipſam nequit contingere (per partem primam huj.) ergo ex una parte cadet intra Parabolam, & ergo (per Cor. Prop. præced.) ipſi iterum occurret. Eodem modo oſtendi poteſt, rectam a puncto Ellipſeos, aut Hyperbolæ ductam, parallelam duabus contingentibus, Ellipſi, aut Hyperbolæ iterum occurrere.

MONITUM.

MONENDUS eſt lector, quod inter ſectiones conicas numeratur circulus, nam quicquid in ſequentibus, de tribus ſectionibus jam definitis probatur univerſaliter, id etiam circulo convenit; ut plerumque ex elementis Geometriæ conſtat.

PROP. XVIII.

Si duæ rectæ ſibi invicem occurrentes, ſint duabus rectis poſitione datis ſemper parallelæ, prout ambæ contingant, aut ſecent, vel earum una contingat, & altera ſecet ſectionem conicam vel ſectiones oppoſitas; quadrata ex contingentium ſegmentis, vel rectangula contenta ſecantium ſegmentis, inter rectarum occurſum, & ſectionem, vel ſectiones, erunt ad ſe invicem ſemper in eadem ratione, ubicunque cadat rectarum occurſus.

CONSTAT hæc Propoſitio ex Propoſitione 11. hujus, & Cor. 1. ad Definitiones.

Cor.

Fig. 22, 23. Cor. I. Hinc, ſi recta quævis LCV ſecans ſectionem conicam, vel oppoſitas ſectiones, in punctis L, V, occurrat in punctis O, S duabus parallelis ſecantibus eandem ſectionem, vel oppoſitas ſectiones, vel utraſque ſectiones oppoſitas, in punctis A, B & H, G; rectangula BOA, HSG contenta ſegmentis parallelarum inter ſectionem, vel ſectiones, & rectam LCV erunt inter ſe, ut rectangula VOL, VSL contenta ſegmentis ipſius LCV inter parallelas, & ſectionem vel ſectiones.

Nam quoniam rectæ BA, LVO ſunt parallelæ iiſdem rectis, quibus ipſæ HG, LVO ſunt parallelæ; in quacunque ratione ſit rectangulum BOA ad rectangulum VOL, in eadem ratione erit rectangulum HSG ad rectangulum VSL, per hanc Propoſitionem: ergo, alternando, BOA eſt ad HSG, ut VOL ad VSL.

Cor. II. Vel ſi recta quævis ſecans ſectionem, vel ſectiones oppoſitas, occurrat duabus rectis parallelis contingentibus eandem ſectionem, vel oppoſitas ſectiones; eodem modo oſtendi poteſt, quod quadrata ex ſegmentis contingentium parallelarum inter earum contactus, & ſecantem cui occurrunt, erunt inter ſe, ut rectangula contenta ſegmentis iſtius ſecantis, inter ipſas parallelas, & ſectionem, vel ſectiones.

Cor. III. Vel ſi recta quævis ſecans ſectionem, vel ſectiones oppoſitas, occurrat duabus parallelis, quarum una eſt contingens, & altera ſecans; quadratum ex ſegmento contingentis, & rectangulum contentum ſegmentis ſecantis, inter ſectionem, & ſecantem cui occurrunt, erunt inter ſe, ut rectangula contenta ſegmentis iſtius ſecantis inter ipſas parallelas, & ſectionem, vel ſectiones.

Cor. IV. Vel ſi recta quævis contingens ſectionem conicam, occurrat duabus parallelis ſecantibus ſectionem, vel ſectiones; rectangula contenta ſegmentis ſecantium inter ſectionem, vel ſectiones, & contingentem cui occurrunt, erunt inter ſe ut quadrata ſegmentorum contingentis inter ipſas parallelas, & ejus contactum.

Cor. V. Vel ſi recta quævis contingens ſectionem conicam, occurrat duabus parallelis contingentibus eandem ſectionem, vel ſectiones oppoſitas; quadrata ex ſegmentis parallelarum contingentium

tium inter earum contactus, & contingentem cui occurrunt, erunt inter ſe ut quadrata ex ſegmentis iſtius contingentis inter ipſas parallelas & ejus contactum.

Cor. VI. Vel ſi recta quævis contingens ſectionem conicam, occurrat duabus parallelis, Quarum una eſt contingens, & altera ſecans; quadratum ex ſegmento contingentis, & rectangulum contentum ſegmentis ſecantis inter ſectionem & contingentem cui occurrunt, erunt inter ſe ut quadrata ex ſegmentis iſtius contingentis inter ipſas parallelas, & ejus contactum.

PROP. XIX.

Si duæ rectæ ſibi invicem parallelæ occurrant cuivis rectæ lateri coni parallelæ, & ambæ contingant, aut ſecent, vel earum una contingat, & altera ſecet ſectionem conicam vel ſectiones oppoſitas; quadrata ex contingentium ſegmentis, vel rectangula contenta ſecantium ſegmentis, inter rectam cui occurrunt, & ſectionem vel ſectiones, erunt inter ſe ut ſegmenta iſtius rectæ inter ipſas parallelas, & punctum in quo occurrit ſectioni conicæ.

NAM hæc recta, cui parallelæ occurrunt, quoniam eſt parallela lateri coni, conveniet cum ſuperficie coni, & proinde cum ipſa ſectione conica (in cujus plano eſt) in unico puncto (per Prop. 5. & Cor. 1. Def.) unde conſtat Propoſitio per Prop. 12. & Cor. 1. Def.

Cor. Hinc ſi linea MVN ſit Parabola in ſuperficie coni poſita, & eam ſecent rectæ parallelæ MN & AB occurrentes diametro ejus LV in D, C; rectangula MDN, ACB contenta ſegmentis parallelarum inter diametrum & Parabolam, erunt inter ſe ut DV, CV ſegmenta diametri inter parallelas, & verticem ejus V. Vel ſi recta XT parallela ipſi MN contingat Parabolam in T, & occurrat diametro Fig. 24.

metro LV in X; erit rectangulum MDN ad quadratum ex TX, ut DV ad XV.

Nam per Definitionem 15, quævis diameter Parabolæ est parallela lateri coni, ei sciz. in quo planum verticale contingit superficiem in qua posita est Parabola. Unde liquet Corollarium ex hac Prop.

PROP. XX.

Contingant duæ rectæ sibi invicem parallelæ Ellipsim, aut Hyperbolas oppositas, & in istis contingentibus sumantur duo puncta a punctis contactus æquidistantia. Si recta hæc puncta conjungens secet Ellipsim, aut Hyperbolas oppositas in duobus punctis, erunt ejus segmenta, inter hæc puncta & contingentes, æqualia: vel si Ellipsim contingat, erunt segmenta, inter ejus contactum & contingentes, æqualia.

CONSTAT hæc Propositio ex Propositione 13. & Corollario 1. Def.

PROP. XXI.

Contingant duæ rectæ sibi invicem parallelæ Ellipsim, aut Hyperbolas oppositas; recta earum contactus jungens bifariam secabit omnes rectas ab Ellipsi, aut utrâvis Hyperbolâ terminatas & contingentibus parallelas.

NAM omnes rectæ contingentibus parallelæ, necessario occurrent rectæ jungenti contactus; unde liquet propositum ex Prop. 14. & Cor. 1. Def.

Fig. 22, 23. Cor. I. Hinc si duæ rectæ inter se parallelæ AB & GH, utrinque terminentur Ellipsi, Hyperbolâ vel diversis & oppositis Hyperbolis; recta OS, utrasque bifariam secans, occurret Ellipsi, vel Hyperbolis

Hyperbolis in duobus punctis, per quæ si contingentes ducantur, erunt parallelæ rectis bifariam sectis.

Intelligantur enim duæ rectæ VX, LT parallelæ rectis AB, GH contingere Ellipsim aut oppositas Hyperbolas (per Prop. 17.) in punctis V, L; tum recta LV jungens earum contactus bifariam secabit rectas AB, GH & proinde coincidet cum ipsa OS: ergo constat Corollarium.

Cor. II. Hinc si rectæ AB, GH inter se parallelæ, et terminatæ Ellipsi Hyperbolâ aut diversis & oppositis Hyperbolis, bifariam secentur rectâ OS; & per puncta V & L in quibus recta bisecans occurrit Ellipsi aut Hyperbolis, ducantur rectæ VX, LT parallelæ rectis bisectis, erunt contingentes; nam si non (per Cor. præced.) contingentes per hæc puncta ductæ erunt quoque parallelæ rectis AB, GH, quod est absurdum.

Cor. III. Hinc patet methodus ducendi duas rectas contingentes Ellipsim aut oppositas Hyperbolas, quæ parallelæ sint rectæ positione datæ, & secanti Ellipsim aut Hyperbolam; nempe ducatur altera secans huic datæ secanti parallela, bifariam secentur hæ parallelæ, & per puncta in quibus recta bisecans occurrit Ellipsi aut Hyperbolis, ducantur duæ rectæ parallelæ rectæ positione datæ; hæ erunt contingentes, per Cor. præc.

PROP. XXII. PROBL. II.

Ellipsi aut Hyperbolis oppositis, positione datis, invenire centrum; & unicum esse centrum cujusvis Ellipseos aut Hyperbolæ demonstrare.

SIT linea VAGHB, Ellipsis aut Hyperbola, & sit *m* L *n* Hyperbola huic opposita: ducantur duæ rectæ sibi invicem parallelæ secantes Ellipsim aut Hyperbolam in punctis A, B & G, H, ducatur recta OS bifariam secans parallelas AB, GH, & occurrens (per Cor. Fig. 22, 23.

 1. præced.)

1. præced.) Ellipſi aut oppoſitis Hyperbolis in duobus punctis puta V,L, bifariam ſecetur recta VL in C; erit iſtud punctum C centrum. Nam per puncta V, L ducantur rectæ VX, LT parallelæ ipſis AB, GH; erunt VX, LT contingentes per Cor. 2. præced. ducatur ergo per punctum C quævis recta occurrens Ellipſi aut Hyperbolis oppoſitis in punctis E, F & contingentibus VX, LT in Q, P; tum propter ſimilia triangula CVQ, CLP, & rectas CV, CL æquales, erunt rectæ CQ, CP æquales, & etiam contingentes VQ, LP; ergo erunt rectæ QE, PF æquales (per 20. hujus) ergo æquales ſunt ipſæ CE, CF. Si vero in Ellipſi recta per C ducta, & ei occurrens in duobus punctis M, N ſit parallela contingentibus VX, LT, bifariam ſecabitur in C (per Propoſitionem præced.) Ergo cum quævis recta per C ducta, & Ellipſi aut oppoſitis Hyperbolis terminata, in hoc puncto C bifariam ſecatur erit hoc punctum C centrum Ellipſeos aut Hyperbolarum per Definitionem 16. *Q. E. I.*

FIG. 23.

Si nunc (ſtantibus jam poſitis) ponatur aliud eſſe centrum Hyperbolarum, puta punctum D; per id ducatur recta parallela ipſi VL, occurret oppoſitis Hyperbolis in duobus punctis A, G (Cor. 4. Def.) occurrat vero contingentibus VX, LT in Q, R; erunt (propter parallelogrammum) VQ, LR æquales, ergo æquales erunt QA, RG (per Prop. 20.) ſed propter D centrum (per Hypoth.) æquales ſunt

DG

DA, ~~GH~~, ergo æquales ſunt DQ, DR; ducatur nunc quævis alia recta per D, occurrens Hyperbolis in Y, Z, & contingentibus in I, K; propter D centrum (per Hypoth.) erunt DY, DZ æquales, & propter triangula DQI, DRK ſimilia, & rectas DQ, DR æquales, erunt ipſæ DI, DK æquales; & proinde (per 5. 2.) erunt rectangula YIZ, YKZ æqualia. Sed hæc rectangula ſunt ut quadrata contingentium VI, LK per Cor. 2. Prop. 18. ergo hæc quadrata, & proinde ipſæ rectæ VI, LK æquantur; ergo recta IK parallela eſt rectæ VL, (33. 1.) hoc eſt, ipſi AG, quod eſt abſurdum; ergo nullum aliud punctum præter C eſt centrum Hyperbolarum. Quod eodem prorſus modo oſtendi poteſt de Ellipſi; hoc autem per ſe manifeſtum eſt,

eſt, nam ſi duo eſſent centra Ellipſeos, recta Ellipſi terminata bifariam ſecaretur in duobus punctis. *Q. E. A.*

Cor. I. Omnes rectæ jungentes contactus duarum parallelarum Ellipſim aut Hyperbolas oppoſitas contingentium, ſe mutuo bifariam ſecant in uno eodemque puncto ſcilicet centro: nam ſi in diverſis punctis bifariam ſecari poſſint, plura eſſent centra Ellipſeos aut Hyperbolarum oppoſitarum, ex prima parte demonſtrationis præcedentis, contra quod in ſecunda oſtenſum eſt.

Cor. II. Quævis recta ut LV, jungens contactus duarum parallelarum contingentium LT, VX, tranſit per centrum & proinde eſt diameter Ellipſeos aut diameter tranſverſa Hyperbolarum, per Def. 17.

Cor. III. Hinc duæ contingentes LT, VX, ductæ per vertices ejuſdem diametri LV Ellipſeos aut Hyperbolarum ſunt parallelæ: Nam ſi non, duci poteſt alia contingens uni earum parallela (Cor. 1. 17. hujus) & recta contactus harum parallelarum jungens tranſiret quoque per centrum (Cor. 1. hujus) quod eſt abſurdum.

Cor. IV. Nulla recta Hyperbolam contingens per centrum ejus tranſit; nam ſi recta quævis contingat Hyperbolam, alia recta ipſi parallela contingere poteſt Hyperbolam oppoſitam (Cor. 1. 17. hujus) & recta earum contactus jungens tranſit per centrum, & proinde neutra ipſarum contingentium per centrum tranſire poteſt.

Cor. V. Hinc quævis recta ducta a centro C Hyperbolæ, ad punctum in ea V, erit ſemidiameter tranſverſa; nam Hyperbolam non continget in V per Cor. præced. ergo per V ducatur VX contingens Hyperbolam, & huic parallela ducatur LT, contingens Hyperbolam oppoſitam; patet jungentem LV eſſe diametrum tranſverſum (per Cor. 2.) & proinde coincidere cum recta CV, ergo hæc recta eſt ſemidiameter tranſverſa.

PROP.

PROP. XXIII.

Omnis recta per centrum Hyperbolæ ducta, parallela rectæ Hyperbolam contingenti, vel in duobus punctis ſecanti, eſt diameter ſecunda.

FIG. 23. PER C centrum Hyperbolarum BVA, *m* L *n* ducatur recta MN parallela cuivis contingenti VX, & per contactum ducatur diameter tranſverſa VCL, & per alterum ejus verticem L ducatur LT contingens oppoſitam Hyperbolam, parallela ipſi VX per Cor. 3. præced. & ducatur quævis recta parallela ipſi VCL occurrens oppoſitis Hyperbolis (per. Cor. 3. Def.) in duobus punctis A, G, & contingentibus VX, LT in Q, R, & rectæ MN in D; tum propter parallelogrammum, erunt contingentes VQ, LR æquales, ergo æquales ſunt rectæ QA, RG (Prop. 20.) & propter VC, CL æquales & CD ipſis VX, LT parallelam, erunt etiam QD, DR æquales, ergo recta AG bifariam ſecatur in D per rectam MN: ergo hæc recta eſt diameter ſecunda per Def. 18. *Q. E. D.*

PROP. XXIV.

Diameter ſectionis cujuſvis conicæ bifariam ſecat omnes rectas a ſectione terminatas, & parallelas contingenti per verticem ejus ductæ.

FIG. 19. PRIMO ſit BAD conus, & in ejus ſuperficie ſectio MVN Parabola, cujus planum verticeale ſit ADE, & diameter recta LV, & contingat recta VX Parabolam in V vertice diametri LV, & ſit recta MN parallela ipſi VX, Parabolâ terminata & occurrens diametro LV in P; in hoc puncto bifariam ſecabitur.

Nam ducatur latus coni AV, & per AV, & contingentem VX tranſeat planum ABK, hoc continget ſuperficiem conicam in latere AVB (Cor. 3. 3. huj.) & quoniam AV ſecat parallelas LV, AD, erit in

in eodem cum iis plano (7. 11.) ergo recta LV est in plano trianguli BAD: per punctum P ducatur in hoc plano recta quævis occurrens ipsi AD in puncto quodam Q, & ipsi AB in O; per hæc puncta ducantur in planis contingentibus ADE, ABK, rectæ QR, OS parallelæ rectæ AF intersectioni plani contingentis ABK cum plano verticali ADE, hæ rectæ superficiem contingent in punctis Q, O, & quoniam sunt parallelæ ipsi AF erunt parallelæ contingenti VX (per 16. 11.) ut & ipsi MN (9. 11.) sed recta MN bifariam secatur in P a recta jungente contactus Q, O (per Prop. 14.) & proinde a diametro LV.

Secundo, sit sectio Ellipsis aut Hyperbola, & quoniam contingentes ductæ per utramque verticem cujusvis diametri sunt inter se parallelæ (per Cor. 3. 22. hujus) quævis diameter bifariam secabit omnes rectas istis contingentibus parallelas, & Ellipsi vel alterutrâ Hyperbolâ terminatas, ut constat ex Prop. 21.

PROP. XXV.

Diameter secunda MN Hyperbolæ bifariam secat omnes rectas Hyperbolis terminatas, & parallelas diametro transversæ LV jungenti contactus contingentium VX, LT, quæ isti diametro secundæ sunt parallelæ. Et contra, si recta AG sit bifariam secta a diametro secunda MN, erit parallela diametro transversæ LV jungenti contactus contingentium VX, LT, quæ sunt isti diametro secundæ parallelæ.

Pars I. SIT recta AG Hyperbolis BVA, *mLn* terminata, & parallela diametro LV jungenti contactus contingentium VX, LT quæ sunt ipsi MN parallelæ, & occurrat ipsa AG diametro MN in D; in hoc puncto bifariam secabitur. Fig. 23.

Nam

Nam occurrat ipſa AG contingentibus in Q, R punctis; tum (propter parallelogrammum LVQR) erunt contingentes VQ, LR æquales, ergo æquales ſunt rectæ AQ, RG, (per Prop. 20.) & propter VC, CL æquales & rectam CD ipſis VQ, LR parallelam, erunt QD, DR æquales; ergo æquales ſunt ipſæ AD, DG, ergo AG bifariam ſecatur diametro ſecundâ MN.

Pars 2. Et (iiſdem manentibus) ſi recta AG bifariam ſecetur diametro MN, erit parallela diametro LV, jungenti contactus contingentium VX, LF quæ ipſi MN ſunt parallelæ; nam propter VC, CL æquales, & rectas VQ, CD, LR parallelas, erunt QD, DR æquales, ſed per hypotheſin AD, DG ſunt æquales; ergo æquales ſunt rectæ AQ, RG & ergo æqualia ſunt rectangula AQG, ARG, ſed hæc rectangula ſunt ut quadrata contingentium VQ, LR (per Cor. 2. Prop. 18.) ergo hæc quadrata & proinde ipſæ rectæ VQ, LR æquantur; ergo (33. 1.) rectæ AQ, RG & LV ſunt parallelæ. Q. E. D.

Corollaria ad duas Propoſitiones præcedentes.

Cor. I. Omnis recta ſectione conicâ terminata, & a diametro bifariam ſecta, eſt parallela contingenti per verticem iſtius diametri ductæ (modo cum ſectio ſit Ellipſis ipſa recta bifariam ſecta, non ſit diameter.) Nam ſi non eſſet parallela huic contingenti, ſit (per Prop. 17.) parallela contingenti ductæ per verticem alterius diametri; tum per Prop. 24. ab hac altera diametro bifariam quoque ſecaretur: quod eſt abſurdum.

Cor. II. Omnes rectæ ordinatim applicatæ eidem diametro ſectionis conicæ ſunt inter ſe parallelæ. Nam cum applicantur diametro Parabolæ, Ellipſeos, aut diametro tranſverſæ Hyperbolæ omnes erunt parallelæ contingenti per verticem iſtius diametri ductæ (per Cor. præc.) & cum applicantur diametro ſecundæ Hyperbolæ

bolæ) erunt uni eidemque diametro tranſverſæ parallelæ, per caſum ſecundum Propoſitionis præcedentis.

Cor. III. Hinc quævis recta ſectione conicâ vel Hyperbolis oppoſitis terminata & parallela ordinatim applicatis cuivis diametro, erit eidem diametro ordinatim applicata.

Cor. IV. Hinc etiam, duæ rectæ ſectione conicâ vel ſectionibus oppoſitis terminatæ ſe mutuo bifariam decuſſare nequeunt, niſi occurrunt in centro Ellipſeos aut ſectionum oppoſitarum. Nam ſi poſſint, tum duci poteſt diameter ſectionis utraſque bifariam ſecans, & proinde eſſent ambæ ordinatim applicatæ eidem diametro & ergo (per Cor. 2.) inter ſe parallelæ, quod eſt abſurdum.

Cor. V. Hinc etiam patet, quod ſi duæ rectæ ſibi invicem parallelæ terminentur ſectione conicâ vel ſectionibus oppoſitis, diameter unam biſecans bifariam ſecabit alteram.

Cor. VI. Recta biſecans duas parallelas ſectione conicâ vel ſectionibus oppoſitis terminatas eſt diameter. Nam diameter unam biſecans bifariam ſecabit alteram.

Cor. VII. Hinc, ſegmento ſectionis conicæ poſitione dato, inveniri poſſunt diametri & centrum ejus: ductis enim duâbus parallelis ſegmento terminatis, recta utraſque biſecans erit diameter; eodem modo, inveniri poteſt alia diameter, quæ ſi ſit priori parallela, ſectio erit Parabola. Si diametri occurrant, occurſus eſt centrum ſectionis, quæ erit Ellipſis, ſi ſegmentum ſit concavum verſus centrum; ſi vero convexum, ſectio erit Hyperbola.

Cor. VIII. Recta per verticem diametri ducta parallela ordinatis ejus, continget ſectionem. Nam ſi non, ducatur per ver-

ticem ejus, recta contingens ſectionem, hæc quoque erit parallela ordinatis iſtius diametri per Cor. 1. *Q. E. A.*

Cor. IX. Hinc patet methodus ducendi rectam quæ ſectionem conicam poſitione datam contingat, & ſit parallela cuivis rectæ ſectionem in duobus punctis ſecanti; nam ducatur recta huic ſecanti parallela & ſectione terminata, recta has parallelas bifariam ſecans erit diameter, & recta per verticem ejus ducta parallela rectis biſectis ſectionem continget per Cor. præced.

PROP. XXVI.

Si duæ rectæ contingentes ſectionem conicam vel ſectiones oppoſitas ſibi invicem occurrant; recta per earum occurſum ducta, & bifariam ſecans rectam jungentem contactus, erit diameter ſectionis.

Fig. 25, 26. CONTINGANT enim rectæ PM, PN, ſectionem conicam vel ſectiones oppoſitas in M, N, jungantur puncta M, N & ducatur PO bifariam ſecans ipſam MN in O; erit PO diameter.

Nam ſi non, per punctum O ducatur diameter ſectionis occurrens contingenti PM in Q, & jungatur NQ ſectioni iterum occurrens in puncto A; per A ducatur recta AD parallela ipſi MN, hæc occurret ſectioni oppoſitæ ut in B (Cor. 4. ad Def.) cum puncta M, N ſunt in oppoſitis ſectionibus; & cum hæc puncta ſunt in eadem ſectione, quoniam A non eſt vertex diametri OQ, recta AD ipſi MN parallela non continget ſectionem (per Cor. 1. præc. & Cor. 2. 17. huj) occurrat igitur ſectioni iterum in B & ipſi OQ in X & PM in D; cum recta AB ſit parallela ipſi MN a diametro OQ biſectæ, ipſa quoque ab eadem diametro bifariam ſecabitur (per Cor. 5. præc.) erit igitur ſegmentum AX æquale ipſi BX; & quoniam in triangulo MQN recta OQ a vertice ducta

biſecat

biſecat baſim in O, eadem biſecabit rectam AD baſi parallelam in X; ergo ſegmentum DX eſt æquale ſegmento AX, hoc eſt, ipſi BX, quod fieri nequit; ergo nulla recta per punctum O ducta præter ipſam PO eſt diameter ſectionis. *Q. E. D.*

Cor. I. Et contra: ſi duæ rectæ ſectionem conicam vel ſectiones oppoſitas contingentes ſibi invicem occurrant; diameter biſecans jungentem contactus tranſibit per occurſum contingentium. Nam unica diameter biſecare poteſt jungentem contactus, & recta biſecans jungentem contactus & tranſiens per occurſum contingentium eſt diameter; ergo conſtat Corollarium.

Cor. II. Hinc patet, quod ſi duæ rectæ contingentes ſectionem conicam, vel ſectiones oppoſitas ſibi invicem occurrant, earum occurſus erit ad diametrum quæ bifariam ſecat jungentem contactus.

Cor. III. Hinc, tres rectæ contingentes ſectionem vel ſectiones oppoſitas, in uno puncto occurrere ſibi invicem nequeunt.

Nam ſi poſſint; ducantur duæ rectæ jungentes unum punctum contactus cum duobus reliquis; tum (per Cor. 1.) duæ diametri has rectas biſecantes occurrerent ſibi invicem in occurſu contingentium, quod fieri nequit. Nam ſi ſectio ſit Parabola, diametri nunquam occurrent, & diametri Ellipſeos aut Hyperbolæ ſolummodo occurrunt in centro, per quod nulla tranſit contingens Cor. 4. 22. hujus.

PROP. XXVII.

Duæ diametri Ellipſeos aut Hyperbolæ, quarum una ſit parallela rectis alteri ordinatim applicatis, ſunt diametri conjugatæ.

Fig. 22. 23

SIT MN quævis diameter Ellipſeos aut diameter ſecunda Hyperbolæ, cui occurrat in puncto D recta AG ei ordinatim applicata, & ſit diameter LV ipſi AG Parallela; erunt hæ duæ diametri MN, LV diametri conjugatæ.

Nam per vertices diametri LV ducantur contingentes VX, LT erunt inter ſe Parallelæ (per Cor. 3. Prop. 22.) & occurrant ipſi AG (ſi opus productæ) in Q, R punctis; tum, propter parallelogrammum, erunt contingentes VQ, LR æquales, ergo (per Prop. 20.) erunt rectæ AQ, RG æquales; ſed æquales ſunt AD, DG (per hypotheſin) ergo æquales ſunt rectæ QD, DR, & rectæ VC, CL ſunt æquales, ergo CD ſive MN parallela eſt ipſis VQ, LT; ſed diameter LV bifariam ſecat (per 24. hujus) omnes rectas quæ, ipſis VQ, LT, hoc eſt, ipſi diametro MN ſunt Parallelæ; ergo diametri MN, LV ſunt diametri conjugatæ per Definitionem 19.

Sit nunc recta AB ordinatim applicata diametro tranſverſæ LV Hyperbolæ, & ducatur diameter ſecunda MN ipſi AB parallela; erunt diametri LV, MN conjugatæ. Nam per vertices diametri LV ducantur rectæ VX, LT, parallelæ ipſi AB, hoc eſt diametro MN, erunt contingentes; (Cor. 8. 25. hujus) ergo per Prop. 25. diameter MN bifariam ſecat omnes rectas Hyperbolis oppoſitis terminatas & diametro LV parallelas: Ergo diametri LV, MN ſunt conjugatæ. *Q. E. D.*

Cor. Patet quod ordinata cujuſvis diametri eſt parallela ejus diametro conjugatæ. Et quod duæ diametri ſunt conjugatæ, ſi una earum ſit parallela contingenti per verticem alterius ductæ.

Et contra: contingens per verticem diametri ducta eſt parallela ejus conjugatæ.

PROP.

PROP. XXVIII. PROB. III.

Datis positione sectione conicâ ejusque diametro; per datum in sectione punctum ducere rectam quæ sit ordinatim isti diametro applicata.

PRIMO, sit sectio Parabola aut Hyperbola ejusque diameter MN positione data (quæ in Hyperbola sit transversa) datumque in sectione sit punctum A, ad diametrum MN ducatur quævis recta AN, & producatur ad H ut æquales sint AN, NH, per H ducatur recta ipsi MN parallela quæ per Cor. 4. & 5. Def. occurret sectioni in aliquo puncto G; erit juncta AG ordinatim applicata diametro MN. FIG. 27.

Nam, propter æquales AN, NH & parallelas DN, GH, æquales erunt AD, DG.

Secundo, sit sectio Ellipsis aut Hyperbola, & sit MN quævis diameter Ellipseos aut diameter secunda Hyperbolæ, cui a puncto in sectione A ducenda est ordinatim applicata; inveniatur centrum sectionis (22. huj.) & per punctum A ducatur diameter sectionis ACH; si recta per verticem ejus H vel A ducta parallela ipsi MN, sectionem contingat, tum diameter ACH est conjugata ipsi MN, & hæ diametri dicuntur sibi invicem ordinatim applicari. Si vero recta per H ducta & ipsi MN parallela, sectioni iterum occurrat in puncto aliquo G, juncta AG erit ordinatim applicata diametro MN. Nam ei occurrat in D; propter æquales AC, CH & parallelas HG, CD, æquales erunt AD, DG, est igitur recta AG ordinatim applicata diametro MN. *Q. E. F.* FIG. 22, 23.

COR. Hinc, per punctum datum in sectione conica positione data, duci potest recta quæ ipsam contingat: Nempe per Cor. 7. Prop. 25. inveniantur diametri sectionis, & per punctum datum ducatur diameter, cui (per hanc Prop.) ducatur ordinata; recta huic ordinatæ parallela, ducta per punctum datum, sectionem continget, per Cor. 8. Prop. 25.

PROP.

PROP. XXIX.

Quadrata rectarum quæ ordinatim applicantur eidem diametro Parabolæ, sunt inter se, ut abscissæ istius diametri inter ipsas ordinatas, & verticem ejus.

Fig. 28. SIT Parabolæ diameter LV cujus vertex est V, occurratque rectis BA, HG ipsi ordinatim applicatis in punctis C, D.

Quoniam hæ rectæ sunt inter se parallelæ (Cor. 2. Prop. 25.) erunt per Cor. Prop. 19. rectangula BCA, HDG, hoc est, quadrata ex ordinatis BC, HD inter se, ut CL, DL sciz. abscissæ diametri inter ipsas ordinatas & verticem ejus V. Def. 21. *Q. E. D.*

PROP. XXX.

Quadrata rectarum quæ ordinatim applicantur cuivis diametro Ellipseos vel transversæ diametro Hyperbolæ, sunt inter se, ut rectangula contenta abscissis diametri inter vertices ejus, & ipsas ordinatas.

Fig. 22, 23. SIT LV diameter Ellipseos vel transversa diameter Hyperbolæ cujus vertices sunt L, V, occurratque in punctis O, S duabus rectis BA, HG ipsi ordinatim applicatis, & Ellipsi, Hyperbolâ, vel diversis Hyperbolis terminatis.

Quoniam hæ rectæ sunt inter se parallelæ (Cor. 2. Prop. 25.) erunt per (Cor. 1. Prop. 18.) rectangula BOA, HSG, hoc est quadrata ex ordinatis BO, HS inter se ut rectangula LOV, LSV contenta sciz. obscissis diametri LV inter ipsas ordinatas & vertices ejus. *Q. E. D.*

Cor. I. Cum per hanc propositionem manifestum est, quod in Ellipsi, vel Hyperbolis oppositis, ordinatæ eidem diametro applicatæ, quæ æqualiter a centro distant, sunt æquales inter se; patet etiam si sectiones oppositæ sibi invicem ita apponantur, ut recta VO cum ipsa LS, & angulus VOC cum angulo suo alterno LSG coincidat,

coincidat, quod totæ ſectiones penitus congruent: & ſimiliter duo ſegmenta Ellipſeos in quæ ab ejus diametro dividitur, ita ſibi invicem apponi poſſunt, ut in toto congruant.

Cor. II. Hinc, ſi ſuper diametrum Ellipſeos deſcribatur Circulus, & a duobus punctis hujuſce diametri ducantur ad Ellipſim rectæ huic diametro ordinatim applicatæ, & rectæ ad Circulum eidem diametro perpendiculares; erunt ipſæ ordinatæ inter ſe, ut perpendiculares. Nam per hanc Prop. quadrata ex ordinatis ſunt inter ſe ut rectangula contenta abſciſſis diametri inter ipſas & vertices ejus, hoc eſt, (propter Circulum) ut quadrata ex perpendicularibus, ergo ipſæ ordinatæ ſunt inter ſe ut perpendiculares.

PROP. XXXI.

Si duæ rectæ ſibi invicem occurrentes contingant vel ſecent, vel earum una contingat & altera ſecet Ellipſim; quadrata ex contingentium ſegmentis, vel rectangula contenta ſegmentis ſecantium, inter rectarum occurſum, & Ellipſim, erunt ad ſe invicem ut quadrata ſemidiametrorum, quibus ipſæ rectæ ſunt parallelæ.

NAM diametri Ellipſeos ſunt ſecantes quæ ſibi invicem occurrunt in centro, & rectangula, contenta earum ſegmentis inter centrum & Ellipſim, ſunt quadrata ſemidiametrorum. Ergo (per 18. huj.) quadrata contingentium, vel rectangula contenta ſegmentis ſecantium, ſunt inter ſe, ut quadrata ſemidiametrorum quibus ſunt parallelæ.

Cor. I. Hinc, ſi in Ellipſi, recta AD ordinatim applicetur diametro MN; erit rectangulum MDN contentum abſciſſis diametri MN, ad quadratum ex ordinata AD, ut quadratum ex diametro MN, ad quadratum ex ipſius conjugata LV. Nam occurrat recta AD producta Ellipſi in G, erit quadratum ex AD Fig. 22.

æquale

æquale rectangulo ADG, & per Cor. 27. huj. diameter LV & recta AG ſunt parallelæ; ergo conſtat Corollarium ex hac Propoſitione.

Cor. II. Si duæ diametri conjugatæ Ellipſeos MN & LV ſint ſibi invicem perpendiculares, erunt inæquales; nam ſi eſſent æquales, a quovis puncto Ellipſeos A ducatur recta AD ad diametrum MN ei ordinatim applicata, erit ipſi LV parallela (Cor. 27. huj.) & proinde angulus MDA eſt rectus (per Hyp.) ſit C centrum & jungatur CA; erit (per 47. 1.) quadratum ex CA æquale quadratis ex CD, DA, hoc eſt quadrato ex CD una cum rectangulo MDN (nam rectangulum MDN & quadratum ex DA æquantur per Cor. præc. quia æquales ſunt diametri MN, LV per Hyp.) ſive (5. 2.) quadrato ex ſemidiametro CN; ergo ſemidiametri CA, CN ſunt æquales: & ſimiliter eſſent omnes ſemidiametri Ellipſeos inter ſe æquales & proinde Ellipſis eſſet Circulus, quod eſt abſurdum, ergo conſtat Corollarium.

Cor. III. Hinc patet, quod ſi duæ rectæ contingentes Ellipſim ſibi invicem occurrant; ſegmenta contingentium inter occurſum & contactus, erunt ad ſe invicem ut ipſæ ſemidiametri, quibus ſunt parallelæ.

DEFINITIO XXIV.

Fig. 23.

SI in Hyperbolæ diametro ſecunda, ſumatur ſegmentum MN in centro biſectum, & ſit quadratum ex ſegmento MN ad quadratum ex diametro LV huic diametro ſecundæ conjugatâ, ut quadrata ex ordinatim applicatis diametro LV ſunt ad rectangula contenta ejus abſciſſis, puncta M, N, termini hujus ſegmenti, dicuntur *Vertices* iſtius diametri ſecundæ; & magnitudo cujuſvis diametri ſecundæ per hujuſmodi puncta determinatur, ut magnitudo diametri tranſverſæ per vertices ejus determinatur.

PROP.

PROP. XXXII.

Si a puncto Hyperbolæ ducatur recta ordinatim applicata diametro ſecundæ; ut quadratum ex ea diametro ſecunda, eſt ad quadratum ex diametro tranſverſa ei conjugata, ita erit ſumma quadratorum ex ſemidiametro ſecunda & ſegmento ejus inter centrum & ordinatam, ad quadratum ex ordinata.

A Puncto Hyperbolæ A ducatur AD ordinatim applicata diametro ſecundæ MN, & ſit diameter LV ipſi MN conjugata; erit quadratum ex CN, ad quadratum ex CV, ut quadrata ex CN, CD ſimul, ad quadratum ex AD. Fig. 23.

Nam ducatur AO ordinatim applicata ipſi diametro LV, erit COAD parallelogrammum, (per Cor. Prop. 27.) & proinde æquales ſunt AD, OC ut & AO, DC.

Per Definitionem præcedentem, eſt quadratum ex CN ad quadratum ex CV, ut quadratum ex (AO ſive) CD ad rectangulum VOL; ergo (per 12. 5.) erit ut quadratum ex CN ad quadratum ex CV, ita ſumma quadratorum ex CN, CD, ad quadratum ex CV & rectangulum VOL ſimul, hoc eſt (per 6. 2.) quadratum ex CO, ſive AD. *Q. E. D.*

Cor. Hinc, ſi a duobus punctis in Hyperbola vel oppoſitis Hyperbolis ducantur duæ rectæ diametro ſecundæ ordinatim applicatæ; erit quadratum ex primo ducta, ad quadratum ex altera, ut ſumma quadratorum ex ſemidiametro ſecunda & diſtantia primo ductæ a centro, ad ſummam quadratorum ex eadem ſemidiametro ſecunda & diſtantia alterius à centro.

PROP. XXXIII.

FIG. 29. Datâ positione quâvis rectâ indefinitâ VL, & puncto V in ea dato, & datâ rectâ MN ab ipsa VL bifariam sectâ in P; describi potest Parabola, cujus diameter sit recta VL, verticem habens punctum V, & cui recta MN sit ordinatim applicata.

NAM per rectam MN transeat planum quodvis a plano MPV diversum, & in hoc plano describatur Circulus circa diametrum MN, & ducatur diameter ejus BPD, ipsi MN perpendicularis, occurrens circulo in punctis B, D; jungatur BV, & per punctum D in plano VBD ducatur recta DA ipsi VL parallela, quæ rectæ BV alicubi occurrat ut in puncto A; quo puncto immoto manente, agatur recta AD circa peripheriam circuli BNDM; intersectio superficiei conicæ, motu ejus genitæ, cum plano MPV, erit Parabola.

Nam per D ducatur DE parallela ipsi MN, erit perpendicularis diametro BD (per constructionem) & ergo Circulum continget in D, & proinde planum ADE superficiem continget (3. huj.) & erit parallelum plano sectionis MVN (per 15. 11.) Hæc sectio est ergo Parabola, & recta VL parallela ipsi AD est diameter ejus, habens verticem punctum V, & recta MN est huic diametro ordinatim applicata; quæ omnia patent ex Definitionibus 11. 15. *Q.E.D.*

COR. Si duæ rectæ NP, YZ inter se parallelæ, occurrant cuivis rectæ VL, & in ea sumatur Punctum V, (non inter P & Z,) ita ut quadratum ex NP sit ad quadratum ex YZ, ut PV, ad ZV; erunt puncta N, Y, in Parabola habente rectam LV diametrum, cujus vertex est punctum V, & cui ordinatim applicantur rectæ NP, YZ. Nam si (per hanc Prop.) describatur Parabola circa diametrum VL cujus vertex sit V, & in qua recta NPM sit isti diametro ordinatim applicata, quoniam recta YZ secat diametrum infra verticem, producta utrinque occurret Parabolæ in duobus punctis

(15.

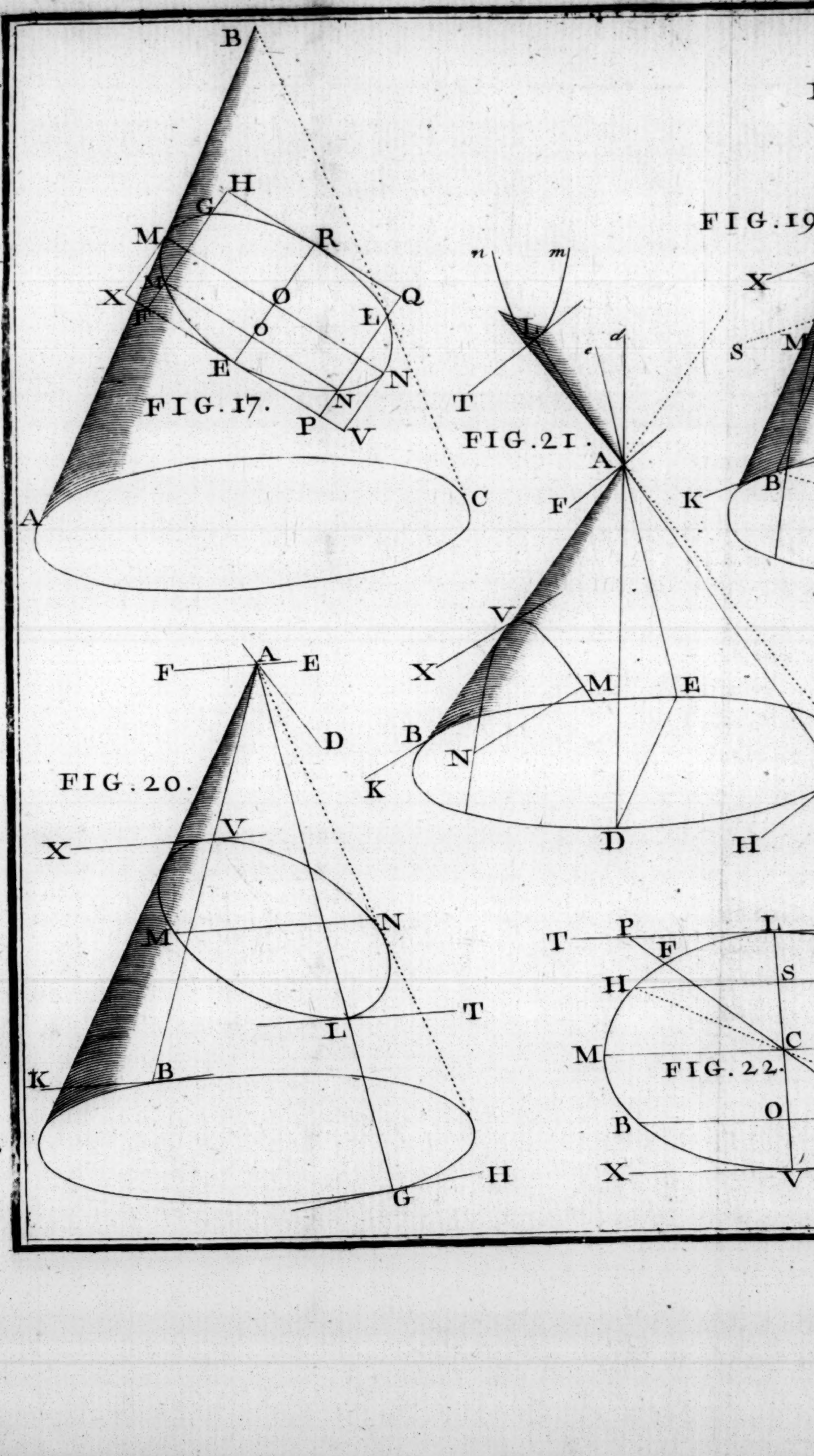
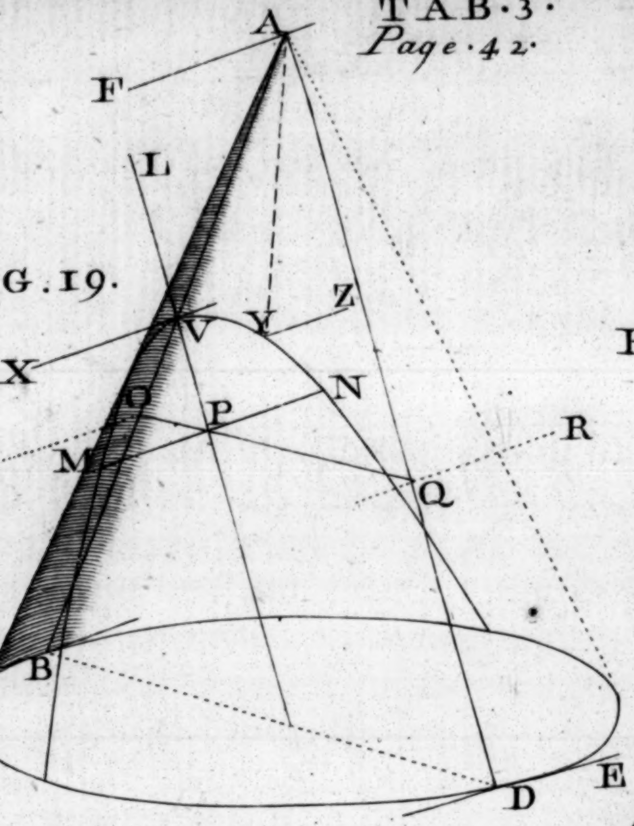


FIG. 17.
FIG. 19
FIG. 20.
FIG. 21.
FIG. 22.

TAB·3·
Page·42·



G.19.

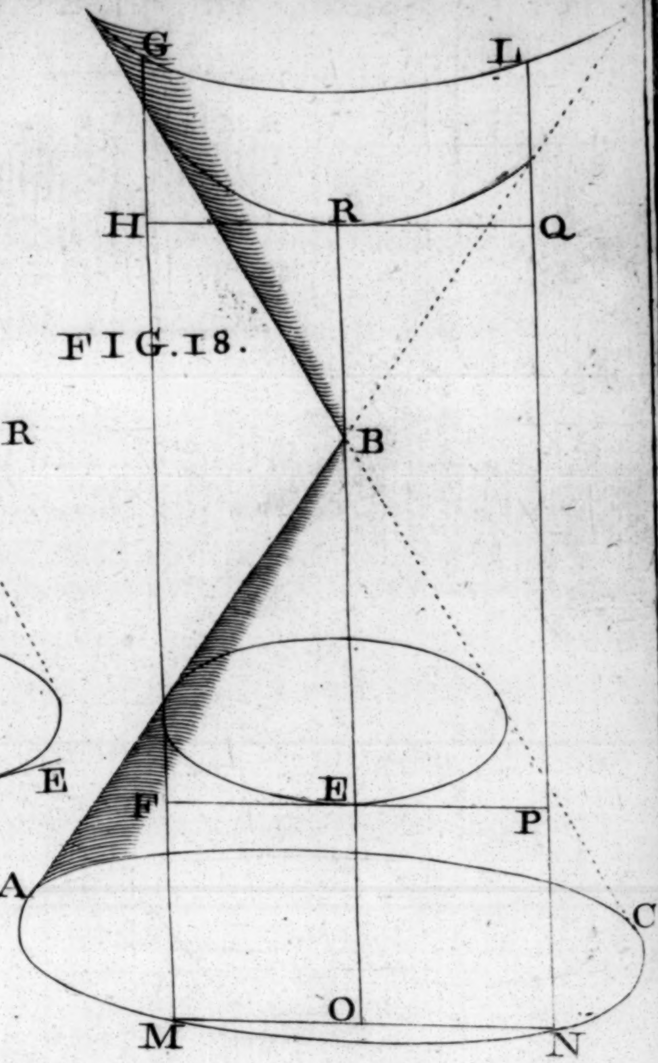
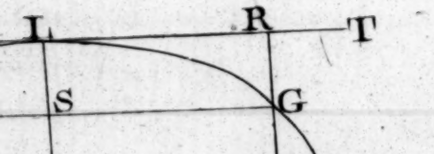


FIG.18.



22.

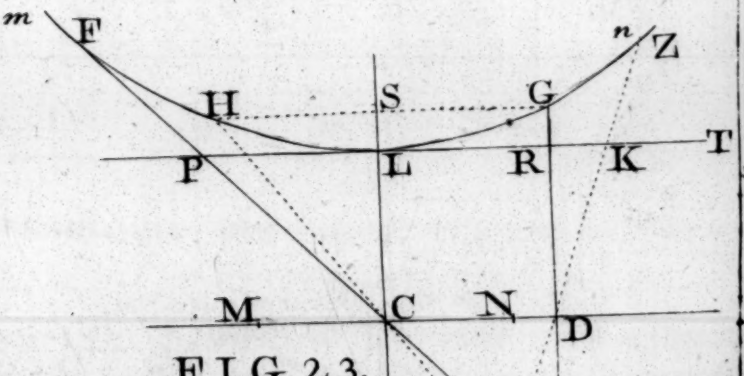


FIG.23.

(15. huj.) & erit eidem diametro LV ordinatim applicata, (Cor. 3. Prop. 25.) & proinde punctum Y erit in hac Parabola; nam si Parabola occurrat rectæ ZY productæ, vel inter puncta Z & Y, per Prop. 29. quadratum ex NP esset ad quadratum ex recta majori, vel minori ipsâ YZ, ut PV ad ZV, contra Hypothesin.

LEMMA I.

SI in duobus planis se invicem intersecantibus, duæ rectæ sint inter se parallelæ; erunt parallelæ communi intersectioni planorum.

Nam si non, intersectioni planorum alicubi occurrent, ac proinde intersectio planorum esset in eodem plano cum duabus parallelis (per 7. 11.) contra Hypothesin.

PROP. XXXIV.

Datis duabus rectis se invicem bifariam secantibus; describi potest Ellipsis in qua datæ rectæ sint diametri conjugatæ; modo rectæ non sint æquales, si sibi invicem perpendiculariter secent.

SINT rectæ datæ VL, MN, & punctum intersectionis C, per rectam MN, transeat planum quodvis a plano MCV diversum, & in hoc plano per punctum C ducatur recta BD perpendicularis ipsi MN, in hac recta, sumpto præter C quovis puncto P pro centro, describatur Circulus transiens per puncta M, N, qui rectæ BD alicubi occurrat ut in punctis B, D. Concurrant rectæ jungentes puncta B, V & L, D sibi invicem in A (nam sunt in eodem plano cum rectis BD, VL (2. 11.) & non erunt parallelæ, nam si sint parallelæ triangula VCB, LCD essent similia & ergo propter CV, CL æquales, essent BC, CD æquales contra Hypoth.) puncto A immoto manente, agatur recta AD circa peripheriam circuli BNDM: intersectio superficiei conicæ ita genitæ cum plano FIG. 30.

MVNL, erit Ellipsis, in qua rectæ VL, MN sunt diametri conjugatæ.

Per terminum D diametri BD ducatur DE contingens Circulum, erit parallela ipsi MN (per Construc. & 16. 3.) & planum ADE continget superficiem in recta ADL, & recta LT, intersectio hujusce plani contingentis cum plano sectionis VNLM, continget sectionem in L; & cum rectæ MN, DE in his planis intersecantibus sint inter se parallelæ, erunt (per Lem. 1.) parallelæ ipsi LT; cum vero rectæ VL, MN sectione MVNL terminatæ, se invicem bifariam secat in C, erunt diametri hujusce sectionis, sive sit Ellipsis (Cor. 4. 25. huj.) sive Circulus. Si diametri VL, MN, non sint sibi invicem perpendiculares, contingens LT ipsi MN parallela, non erit perpendicularis diametro LV per contactum ductæ, ergo sectio MVNL non erit Circulus (16. 3.) & si diametri VL, MN sint sibi invicem perpendiculares sunt per Hypoth. inæquales, ergo nec in hoc casu sectio MVNL erit Circulus; ideoque sectio MVNL conum ambiens est Ellipsis (per Cor. 7. ad Def.) & diametri ejus VL, MN sunt conjugatæ (Cor. 27. huj.) quia MN parallela est contingenti LT ductæ per verticem ipsius VL. *Q. E. D.*

Cor. Bifariam secent se invicem datæ rectæ VL, MN in C, ut in Propositione: Si a quovis puncto Y, ducatur YZ ad rectam VL, & parallela ipsi MN, & si rectangulum LZV sit ad quadratum ex YZ, ut quadratum ex LC ad quadratum ex MC; erit punctum Y in Ellipsi circa diametros conjugatas VL, MN descripta. Nam aliter rectangulum LZV esset ad quadratum rectæ majoris vel minoris ipsâ YZ, ut quadratum ex LC ad quadratum ex MC (per Cor. 1. Prop. 31.) contra Hypothesin.

PROP.

PROP. XXXV.

Datis duabus rectis se invicem bifariam secantibus, describi possunt Hyperbolæ oppositæ, quarum una e rectis datis sit diameter transversa, & altera diameter secunda ei conjugata.

SINT rectæ datæ VL, MN, & earum intersectio C; sumatur in LV producta, punctum quodvis O per quod ducatur RQ ipsi MN parallela, & sumantur utrinque RO, OQ, æquales & ita ut quadratum ex RO vel OQ sit ad rectangulum VOL, ut quadratum ex MN ad quadratum ex LV; per rectam RQ transeat planum quodvis a plano ROV diversum, & in hoc plano ducatur per O recta BD ipsi RQ perpendicularis, in hac recta sumpto quovis puncto P pro centro, describatur Circulus transiens per puncta R, Q, qui rectæ BD alicubi occurrat ut in punctis, B, D, jungantur BV & DL, & concurrent hæ rectæ BV, LD, alicubi ut in A puncto (nam sunt in eodem plano cum rectis BD, VL, & non sunt parallelæ) & circa peripheriam circuli BQDR agatur recta per punctum A utrinque producta; intersectiones superficierum oppositarum quæ motu hujus rectæ sunt genitæ, cum plano MVNL, erunt Hyperbolæ oppositæ per Definitionem 13. Fig. 31.

Per puncta B, D ducantur BK, DE circulum contingentes, erunt parallelæ ipsi RQ quæ est diametro BD perpendicularis; tum recta VX intersectio plani contingentis ABK cum plano Hyperbolarum continget Hyperbolam, RVQ in V, & (per Lem. 1.) erit parallela ipsis OR, BK, & recta LT intersectio plani contingentis ADE cum plano Hyperbolarum, continget Hyperbolam oppositam in L, & erit parallela ipsis OR, DE. (per Lem. 1.) Ergo contingentes VX, LT sunt sibi invicem & rectæ MN parallelæ, & ergo recta VL est diameter transversa Hyperbolarum (per

(per Cor. 2. Prop. 22.) & recta MN est diameter secunda ipsi VL conjugata (per Cor. Prop. 27.) & puncta M, N, sunt vertices ejus per Constructionem & Definitionem 24. Et eodem modo describi possunt duæ aliæ Hyperbolæ oppositæ quarum recta MN sit diameter transversa, & VL diameter secunda ei conjugata. *Q. E. D.*

Cor. Bifariam secent se invicem datæ rectæ VL, MN, & ad rectam VL productam ducatur RO ipsi MN parallela, & sit, ut quadratum ex MN ad quadratum ex VL, ita quadratum ex RO ad rectangulum VOL; erit punctum R in Hyperbola cujus diameter transversa est recta VL, cui ipsa RO est ordinatim applicata, & cui ipsa MN est diameter conjugata; ut patet.

DEFINITIO XXV.

Fig. 32. SIT BAF, conus & sint lineæ *a*V*t*, *m*L*n* Hyperbolæ oppositæ, quarum planum verticale sit ADE occurrens superficiebus oppositis in rectis DA*d*, EA*e*, ducantur plana ADGC, AEHC contingentia superficies conicas in rectis DA*d*, EA*e*, & sint rectæ GC*g*, HC*h* intersectiones horum planorum cum plano Hyperbolarum; hæ rectæ dicuntur Hyperbolarum *Asymptoti*.

Cor. I. Asymptoti Hyperbolarum GC*g*, HC*h* sunt parallelæ lateribus coni AD, AE in quibus planum verticale superficiei occurrit; nam planum verticale est parallelum plano Hyperbolarum, ergo constat Cor. per hanc Definitionem & 16. 11.

Cor. II. Asymptoti GC*g*, HC*h* cum ipsis Hyperbolis non conveniunt; nam asypmtoti sunt in planis superficies conicas contingentibus & (per Cor. præc.) sunt parallelæ rectis DA*d*, EA*e* in quibus solis hæc plana occurrunt superficiebus: ergo asymptoti non conveniunt cum superficiebus conicis, ac proinde non cum ipsis Hyperbolis in istis superficiebus positis.

Cor.

Cor. III. Omnis recta ut NV ducta in plano Hyperbolarum & HC*b* alterutri aſymptotorum parallela, occurret uni Hyperbolarum in unico puncto, & erit ex una parte, tota intra hanc Hyperbolam, & ex altera parte, tota extra utraſque.

Nam (per Cor. I.) recta NV eſt parallela lateri coni AE, ergo (per Prop. 5.) occurret uni ſuperficierum oppoſitarum in unico puncto, & erit ex una parte, tota intra hanc ſuperficiem, & ex altera parte, tota extra utraſque ſuperficies: ergo quoniam recta NV ſit in plano Hyperbolarum, Corollarium conſtat per Cor. 1. ad Definitiones Sectionum.

Cor. IV. Si utramque rectarum continentium angulum GC*b*, qui deinceps eſt angulo GCH Hyperbolam continenti, ſecet recta PQ; cum utraque Hyperbola conveniet. Nam ſi a puncto C occurſu aſymptotorum ducatur recta CV ipſi PQ parallela, cadet intra angulum GCH, & ergo, quia æquales ſunt anguli GCH, DAE (10. 11.) ſi a vertice coni A ducatur recta parallela ipſi CV ſive PQ, cadet hæc intra angulum DAE & proinde intra ſuperficies conicas; ergo recta PQ occurret ſuperficiebus oppoſitis (per Cor. 2. Prop. 6.) & proinde cum utraque Hyperbola conveniet, quia eſt in eodem plano cum iis.

Cor. V. Si recta contingat Hyperbolam in quovis puncto V, conveniet cum utriſque aſymptotis HC, GC quæ iſtam Hyperbolam continent; nam ſi fuerit alterutri aſymptotorum parallela, eſſet ex una parte puncti V, intra Hyperbolam (per Cor. 3.) contra Hypotheſin; vel ſi occurreret lateribus anguli, qui deinceps eſt angulo HCG, conveniret cum utraque Hyperbola (per Cor. 4.) & proinde non eſſet contingens (per Cor. 2. ad Def. Sect.) ergo occurret lateribus anguli HCG Hyperbolam continentis.

Cor. VI. Patet rectam RS ſecantem Hyperbolam vel oppoſitas Hyperbolas convenire cum aſymptotis.

PROP.

PROP. XXXVI.

Si recta secans Hyperbolam vel oppositas Hyperbolas conveniat in duobus punctis cum asymptotis; segmenta ejus inter Hyperbolam vel Hyperbolas, & asymptotos, erunt æqualia. Vel si recta contingat Hyperbolam; segmenta ejus inter contactum & asymptotos erunt æqualia. Vel si recta conveniat cum asymptotis, & segmenta ejus inter asymptotos, & punctum in Hyperbola sint æqualia; in isto puncto Hyperbolam continget.

Fig. 32. *Pars* 1. SECET recta RS Hyperbolam vel Hyperbolas in punctis R, S, & occurrat asymptotis in P, Q. erunt segmenta PR, QS inter se æqualia. Nam sit AC communis intersectio planorum contingentium ADGC, AEHC & in his planis ducantur per puncta P, Q. rectæ PK, QI ipsi AC parallelæ, occurrentes lateribus coni *d*AD, *e*AE in K, I punctis; patet hasce rectas contingere eandem, vel oppositas superficies conicas, in punctis K, I, & (propter parallelogramma) erunt ipsi AC, & proinde sibi invicem æquales; ergo cum recta jungens puncta P, Q. secat eandem, vel oppositas superficies conicas in R, S, erunt segmenta RP, SQ inter se æqualia per Prop. 13.

Pars 2. Contingat Hyperbolam quævis recta ut TX in V, & occurrat ejus asymptotis in X, & T punctis; erunt segmenta VX, VT æqualia. Nam a punctis X, T, ducantur in planis contingentibus duæ rectæ XY, TZ ipsi AC parallelæ, occurrentes lateribus coni *d*AD, *e*AE in punctis Y & Z, patet hasce rectas in istis punctis contingere superficiem conicam BAF & esse (propter parallelogramma) ipsi AC, & proinde sibi invicem, æquales; Ergo cum recta jungens puncta X, T contingat superficiem conicam in V, erunt segmenta VX, VT æqualia per Prop. 13.

Pars

Pars 3. Vel si recta XT occurrens asymptotis in X, T, conveniat cum Hyperbola in V, & sint segmenta VX, VT æqualia; recta continget Hyperbolam in puncto V.

Nam si ei occurreret in alio puncto puta *p*, segmentum T *p*, æquale esset segmento VX, (per partem prim.) hoc est ipsi VT, quod est absurdum: Ergo non occurrit Hyperbolæ nisi in V, ergo ipsam contingit; nam non cadet ex una parte tota intra Hyperbolam, quia ponitur occurrere utrisque ejus asymptotis. *Q. E. D.*

Cor. I. Asymptoti concurrunt in centro Hyperbolarum; nam ducantur duæ rectæ QP, HG inter se parallelæ, secantes Hyperbolam in punctis S, R & *a*, *t* & occurrentes asymptotis in punctis Q, P & H, G, & per occursum asymptotorum C ducatur CV bifariam secans rectam QP in O, hæc quoque bifariam secabit rectam HG, (per 2 Cor. 4. 6.) in puncto *q*; sed cum segmenta RP, SQ, ut etiam *t*G, *a*H æqualia sunt, recta CV bifariam secabit ipsas SR, *a t* Hyperbolâ terminatas: ergo hæc recta est diameter transversa Hyperbolæ; eodem modo ostendi potest, aliam rectam per occursum asymptotorum ductam esse diametrum transversam. Ergo asymptoti concurrunt in centro Hyperbolarum.

Cor. II. Omnis recta LCV ducta per centrum, & intra angulum HCG Hyperbolam continentem est diameter transversa; nam quævis recta ducta ipsi LCV parallela & in plano Hyperbolarum necessario occurret lateribus anguli, qui deinceps est angulo HCG, & ergo occurret oppositis Hyperbolis (Cor. 4. ad Def. 25.) ergo ipsa LCV huic rectæ parallela occurret (Cor. 3. ad Def. Sect.) oppositis Hyperbolis; sed transit per centrum, ergo est diameter transversa per Def. 19.

Cor. III. Omnis recta MN ducta per centrum, & intra angulum qui deinceps est angulo HCG Hyperbolam continenti, est diameter secunda. Nam per punctum quodvis O intra Hyperbolam, ducatur recta ipsi MN parallela; patet eam occurrere lateribus

anguli HCG, & proinde ipsi Hyperbolæ, in duobus punctis; ergo recta MN est diameter secunda per Prop. 23.

Cor. IV. Hinc datis positione asymptotis, patet methodus ducendi rectam, quæ Hyperbolam in dato puncto contingat. Sint enim asymptoti HC, GC positione datæ, & sit V punctum in Hyperbola datum; per V ducatur recta V*r* uni asymptoto HC parallela, & alteri CG occurrens in *r*, & in asymptoto CG sumatur *r*X æqualis ipsi C*r*, & jungatur VX, erit hæc recta contingens; nam producta occurrat HC in T; tum propter CT, *r*V parallelas & C*r*, *r*X æquales; erunt ipsæ TV, VX æquales; ergo recta TX contingit Hyperbolam in V per Cas. 3. Propositionis.

Cor. V. Hinc, datis positione Hyperbolis & earum asymptotis, patet methodus ducendi rectam a puncto dato X, in asymptoto CG, quæ Hyperbolam adjacentem contingat. Nam bifariam secetur CX in *r*, & per *r* ducatur recta alteri asymptoto CH parallela, Hyperbolæ adjacenti occurrens in V, & erit juncta XV contingens; producta enim occurrat asymptoto CH in T, & propter æquales X*r*, *r*C (2. 6.) erunt XV, VT æquales; ergo recta XVT est contingens.

PROP. XXXVII.

Si recta secans Hyperbolam occurrat asymptoto; erit rectangulum contentum segmentis secantis, inter asymptoton & Hyperbolam, æquale quadrato quod fit ex segmento contingentis huic secanti parallelæ interjecto inter contactum ejus, & asymptoton.

Fig. 32. SECET recta Hyperbolam in punctis S, R, & occurrat asymptoto CG in P, & contingat Hyperbolam in V recta XT ipsi SR parallela, occurrens asymptoto CG in X, erit rectangulum RPS æquale quadrato ex VX.

Ducantur

Ducantur enim per puncta P, X duæ rectæ in plano contingente ADGC inter ſe parallelæ, & occurrentes lateri coni *d*AD in punctis K, Y, contingent ſuperficiem conicam in iſtis punctis, & erunt inter ſe æquales, propter parallelas XP, YK (Cor. 1. Def 24.) quoniam igitur recta PRS ſecat & recta PK contingit ſuperficiem conicam & hæ rectæ ſunt parallelæ duabus rectis XV, XY contingentibus eandem ſuperficiem; erit (per Prop. 11.) rectangulum RPS ad quadratum ex PK, ut quadratum ex VX ad quadratum ex XY: ſed quadrata ex PK, XY ſunt æqualia, ergo rectangulum RPS æquale eſt quadrato ex VX (14. 5.) *Q. E. D.*

Cor. Hinc ſi per punctum R in Hyperbola, ducatur recta occurrens ejus aſymptotis in P, Q punctis, & eidem Hyperbolæ iterum in S; erit rectangulum PRQ æquale quadrato ex ſegmento contingentis VX, ipſi PQ parallelæ, interjecto inter contactum & aſymptoton. Nam propter æquales RP, SQ, æquales ſunt PS, RQ ergo erit rectangulum PRQ æquale rectangulo RPS, hoc eſt quadrato ex VX per hanc Prop.

PROP. XXXVIII.

Quævis recta aſymptotis intercepta & Hyperbolam contingens; æqualis eſt diametro ſecundæ quæ eſt ipſi parallela.

CONTINGAT recta Hyperbolam in puncto V, & occurrat ejus aſymptotis in T, X punctis; erit recta TX æqualis diametro ſecundæ MN ipſi TX parallelæ. Fig. 32.

Ducatur enim per contactum diameter tranſverſa LVO, & per punctum in ea O, ducatur recta SR ei ordinatim applicata, erit hæc parallela contingenti VX; producatur ipſa SR utrinque ut occurrat aſymptotis in punctis Q, P; æquales erunt OQ OP; & quoniam per Cor. præc. rectangulum PRQ æquale eſt quadrato

 drato

drato ex VX, differentia quadratorum ex OP & VX erit quadratum ex OR (per 5. 2.) & differentia quadratorum ex CO, CV est rectangulum VOL (per 6. 2.) Tum propter similia triangula CVX, COP, erit quadratum ex OP ad quadratum ex VX, ut quadratum ex CO ad quadratum ex CV, ergo (dividendo) erit quadratum ex OR ad quadratum ex VX, ut rectangulum VOL ad quadratum CV, ergo (alternando) quadratum ex OR est ad rectangulum VOL, ut quadratum ex VX ad quadratum ex CV, hoc est, ut quadratum ex TX ad quadratum ex LV: ergo TX est æqualis diametro secundæ ipsi LV conjugatæ (per Definitionem 24.) & proinde ipsi TX parallelæ.

Cor. I. Recta VN jungens vertices duarum diametrorum conjugatarum LV, MN, est uni asymptoto parallela, & ab altera bifariam secta. Occurrat enim asymptotos CG ipsi VN in *r*, & sit altera asymptotos CH; per verticem V diametri VL ducatur recta Hyperbolam contingens, & occurrens asymptotis in punctis T, X; erit (Cor. 27. huj.) VT parallela ipsi CN, et erit eidem æqualis (per hanc Prop.) ergo (33. 1.) rectæ VN, TC sunt parallelæ et æquales. Quoniam vero XV est dimidium ipsius XT, erit V*r* (2. 6.) dimidium ipsius TC sive VN, ergo VN bifariam secatur in puncto *r*; et proinde constat corollarium.

Cor. II. Hinc, Hyperbolâ positione datâ, facile inveniuntur ejus asymptoti; inveniantur enim (per Cor. 7. Prop. 25.) diameter quævis transversa LV et centrum C; et (per Prop. 28.) ducatur RO ordinatim applicata diametro LV et (per Def. 24.) inveniatur diameter secunda MN ipsi LV conjugata, jungantur V, N vertices diametrorum conjugatarum et a centro ducatur recta CG bifariam secans ipsam VN, et recta CH ipsi VN parallela, erunt rectæ CG, CH asymptoti: ut patet.

PROP.

PROP. XXXIX.

Si per punctum in aſymptoto ducatur recta ſecans Hyperbolam, vel utraſque Hyperbolas; rectangulum contentum ſegmentis ſecantis inter aſymptoton & Hyperbolam, vel Hyperbolas, erit æquale quadrato, quod fit ex ſemidiametro quæ iſti ſecanti eſt parallela.

PRIMO: a puncto P in aſymptoto CG, ducatur recta ſecans Hyperbolam in punctis R, S, & ſit CN ſemidiameter ſecunda ipſi PRS parallela; erit rectangulum RPS æquale quadrato ex contingentis ſegmento VX (per 37. huj.) hoc eſt, quadrato ex ipſa CN per præcedentem. FIG. 32.

Secundo: per idem punctum P ducatur recta ſecans oppoſitas Hyperbolas in R, S punctis, ſit LCV diameter tranſverſa ipſi RPS parallela, & ducatur in plano contingente ADG recta PK parallela ipſi CA interſectioni planorum contingentium ADG, AEH & occurrens lateri coni AD in K; patet hanc PK contingere ſuperficiem coni BAF in K, & eſſe ipſi CA æqualem; quoniam ergo recta PK contingit ſuperficiem conicam & recta PRS ſecat utraſque ſuperficies & hæ rectæ ſunt parallelæ duabus rectis CA, LV occurrentibus in C, quarum una CA per verticem coni tranſit & proinde ſuperficiem contingit in A, & altera ſecat utraſque ſuperficies; erit (per 11. huj.) rectangulum RPS ad quadratum ex PK, ut rectangulum VCL ad quadratum ex CA: ſed æquantur quadrata ex PK, & CA; ergo rectangulum RPS æquale eſt (14. 5.) rectangulo VCL, hoc eſt, quadrato ex CV vel CL ſemidiametro tranſverſæ ipſi RPS parallelæ.

Q. E. D.

COR. I. Vel ſi per punctum R in Hyperbola, ducatur recta aſymptotis occurrens in duobus punctis P, Q; erit rectangulum PRQ contentum ſegmentis inter Hyperbolam & aſymptotos, æquale

æquale quadrato ex ſemidiametro quæ eſt ipſi PQ parallela: ſit enim recta PQ parallela ſemidiametro ſecundæ CN; & erit rectangulum PRQ æquale rectangulo RPS (per Cor. 37. huj.) hoc eſt, quadrato ex CN, per caſum primum hujus Propoſitionis. Sit nunc recta PQ parallela ſemidiametro tranſverſæ CV, & producta occurrat Hyperbolæ oppoſitæ in S; tum, propter æqualia ſegmenta PR, QS, rectangulum PRQ eſt æquale rectangulo RPS, hoc eſt, quadrato ex CV, per Caſum ſecundum hujus Propoſitionis.

Cor. II. Hinc, ſi recta RS Hyperbolis oppoſitis terminata, ſecetur in punctis P & Q, ita ut utrumque rectangulum RPS, RQS ſit æquale quadrato ex ſemidiametro CV quæ eſt ipſi RS parallela, erunt puncta P, Q, ad aſymptotos, ut patet.

Cor. III. Hinc etiam, diameter tranſverſa minor eſt quâvis rectâ ei parallelâ & Hyperbolis oppoſitis terminatâ.

Cor. IV. Quoniam quævis recta contingens Hyperbolam SVR occurrit utriſque aſymptotis ejus CG, CH, duæ quævis rectæ contingentes eandem Hyperbolam occurrent ſibi invicem intra angulum GCH; & ſi duæ rectæ non inter ſe parallelæ contingant oppoſitas Hyperbolas, neceſſario occurrent intra angulum qui deinceps eſt angulo GCH. Nam duæ contingentes ad aſymptoton convenire nequeunt; ſi enim poſſint, diameter (recta ſciz. ducta per occurſum contingentium & bifariam ſecans jungentem contactus 26. huj.) occurreret aſymptoto in alio puncto præter centrum. *Q. E. A.*

PROP.

PROP. XL.

Si duæ rectæ ſibi invicem occurrant, prout ambæ contingant aut ſecent, vel earum una contingat & altera ſecet Hyperbolam vel Hyperbolas oppoſitas; quadrata ex contingentium ſegmentis, vel rectangula contenta ſecantium ſegmentis, inter rectarum occurſum & Hyperbolam vel Hyperbolas erunt ad ſe invicem ut quadrata ſemidiametrorum quibus ipſæ rectæ ſunt parallelæ.

NAM ſi occurrant ſibi invicem in puncto Q ad aſymptoton CY, rectæ RS, VT utcunque convenientes cum Hyperbola vel Hyperbolis in punctis R, S & V, T, & ſint parallelæ duabus ſemidiametris CA, CB; per Prop. 38. 39. rectangulum RQS erit æquale quadrato ex ſemidiametro CA, & rectangulum VQT, vel quadratum ex contingente QVT erit æquale quadrato ex ſemidiametro CB: ergo rectangulum RQS eſt ad rectangulum VQT vel ad quadratum ex contingente QVT, ut quadratum ex CA ad quadratum ex CB. Si nunc duæ rectæ ipſis RS, VT parallelæ, occurrant ſibi invicem in puncto quod non eſt in aſymptoto; harum quadrata, vel rectangula contenta earum ſegmentis, erunt inter ſe ut quadrata, vel rectangula ex ſegmentis ipſarum RS, VT (per 18. huj.) ideoque ſunt ut quadrata ex ſemidiametris CA, CB quibus ipſæ rectæ ſunt parallelæ. FIG. 33.

COR. I. Hinc ſi a quovis puncto P ducantur duæ rectæ PO, PX, contingentes eandem Hyperbolam vel Hyperbolas oppoſitas; erunt rectæ PO, PX, inter ſe ut ſemidiametri quibus ſunt parallelæ. Nam eorum quadrata ſunt ut quadrata ſemidiametrorum. FIG. 34.

COR. II. Si duæ rectæ MN, TR, Hyperbolam vel Hyperbolas oppoſitas contingentes in O, X punctis, occurrant aſymptotis in M, N & T, R; rectæ MR, TN quæ inter occurſus ducuntur,

erunt

erunt ſibi mutuo, & rectæ OX jungenti contactus parallelæ. Nam (per Prop. 38, & Cor. præc.) erit PO ad PX ut OM, ad XR; ergo recta XO eſt ipſi MR parallela (per 2. 6.) et ſimiliter quoniam PO eſt ad PX, ut NO ad TX, erit (alternando) PO ad NO, ut PX ad TX, & erit (convertendo) PO ad PN, ut PX ad PT; ergo triangula OPX, NPT, habentia latera circa æquales angulos proportionalia, ſunt æquiangula; (6. 6.) ergo angulus TNP eſt æqualis angulo alterno XOP, & proinde recta XO eſt ipſi TN parallela.

Cor. III. Hinc, ſtantibus jam poſitis; ſegmentum NR aſymptoti CZ interceptum duabus rectis contingentibus Hyperbolam vel Hyperbolas oppoſitas, bifariam ſecatur rectâ OX (ſi opus productâ) jungente contactus; nam OX eſt parallela ipſi MR (per Cor. præc.) occurrat igitur (ſi opus producta) aſymptoto CZ in B, & propter MO, ON æquales (36. huj.) erunt rectæ RB, BN æquales.

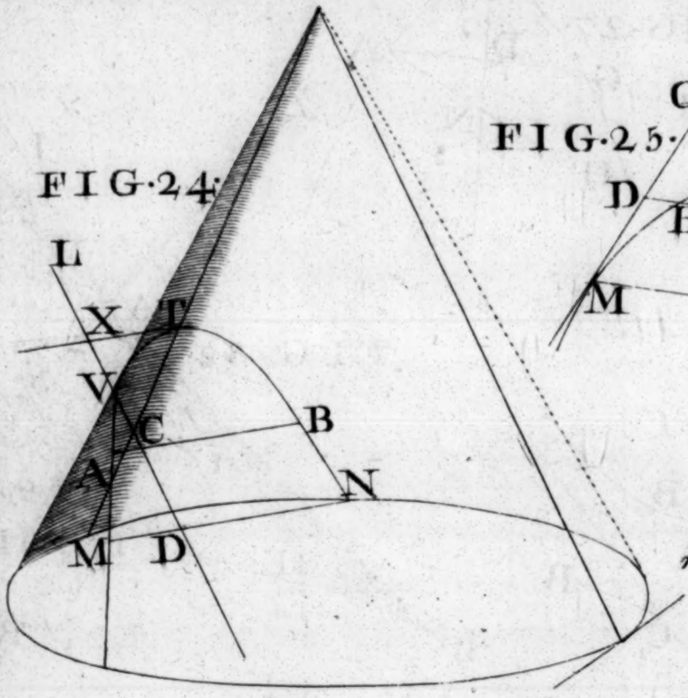
PROP. XLI.

Fig. 35. Si recta ſecans Hyperbolam vel Hyperbolas in punctis E, F, vel Hyperbolam contingens in O, occurrat diametro ſecundæ MN in puncto P; erit rectangulum EPF contentum ſegmentis ſecantis, vel quadratum ex contingente PO, ad quadratum ex ſegmento PC inter rectam & centrum ſimul cum quadrato ex ſemidiametro MC, ut quadratum ex CA ſemidiametro cui ſecans vel contingens ſit parallela, ad quadratum ex MC ſemidiametro cui ſecans vel contingens occurrit.

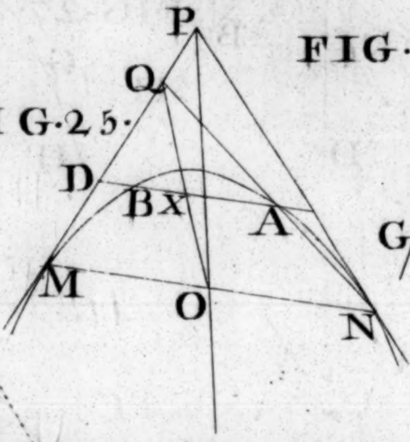
DUCATUR enim per P, recta QR ipſi MN ordinatim applicata, & ſit LV diameter ipſi MN conjugata, & proinde parallela rectæ QR, per Prop. præc. erit rectangulum FPE ad (rectangulum QPR ſive) quadratum ex PQ, ut quadratum

ex

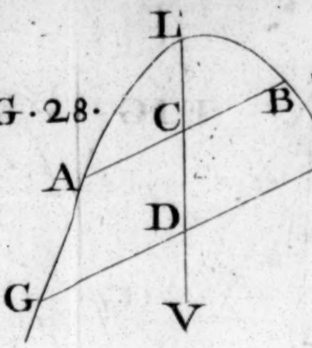
FIG·24.



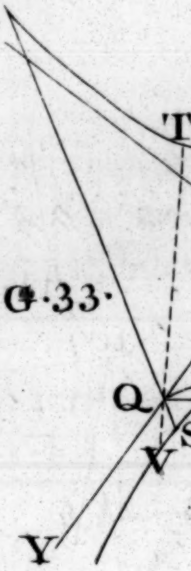
FIG·25.



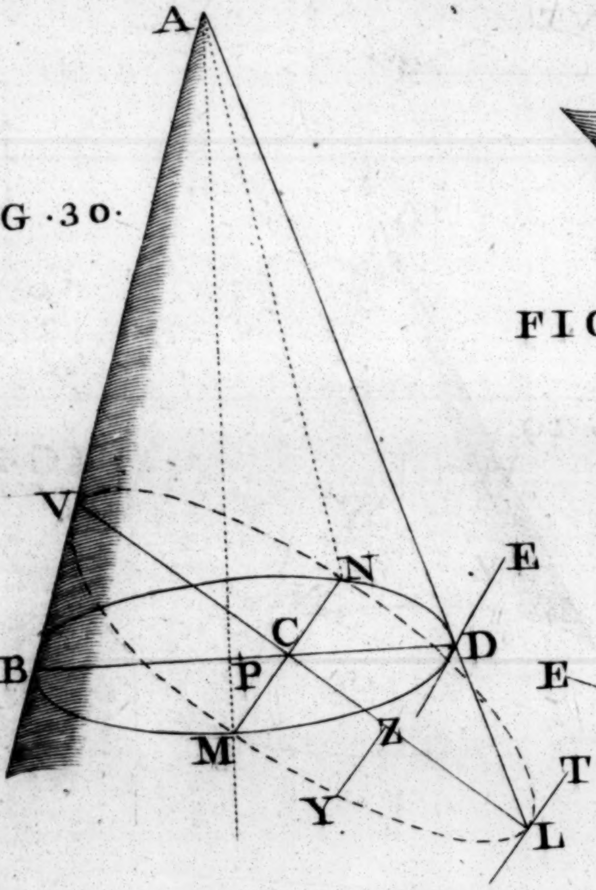
FIG·28.



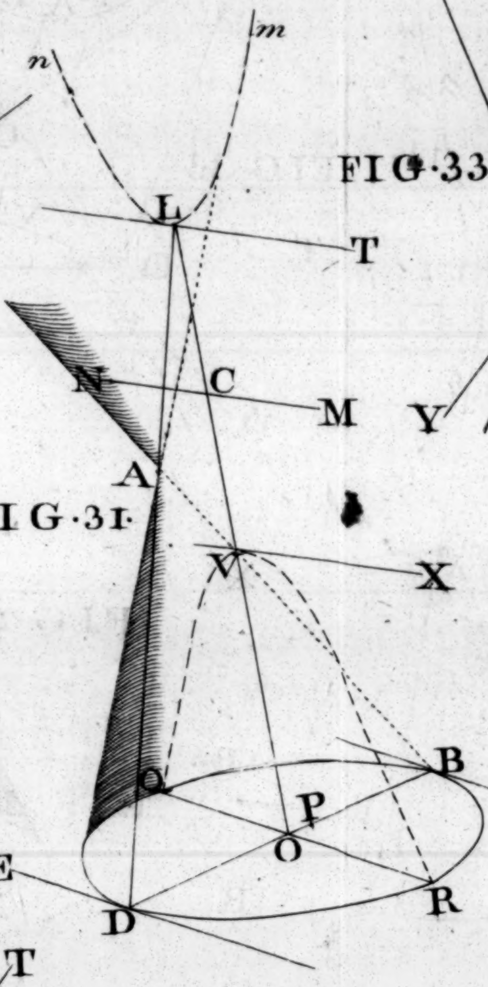
FIG·33.



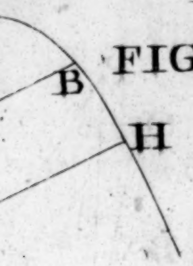
FIG·30.

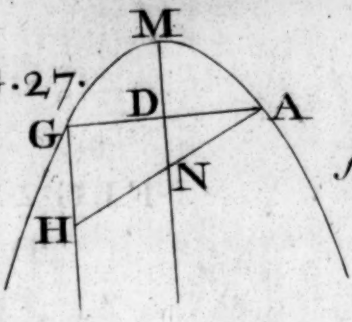


FIG·31.

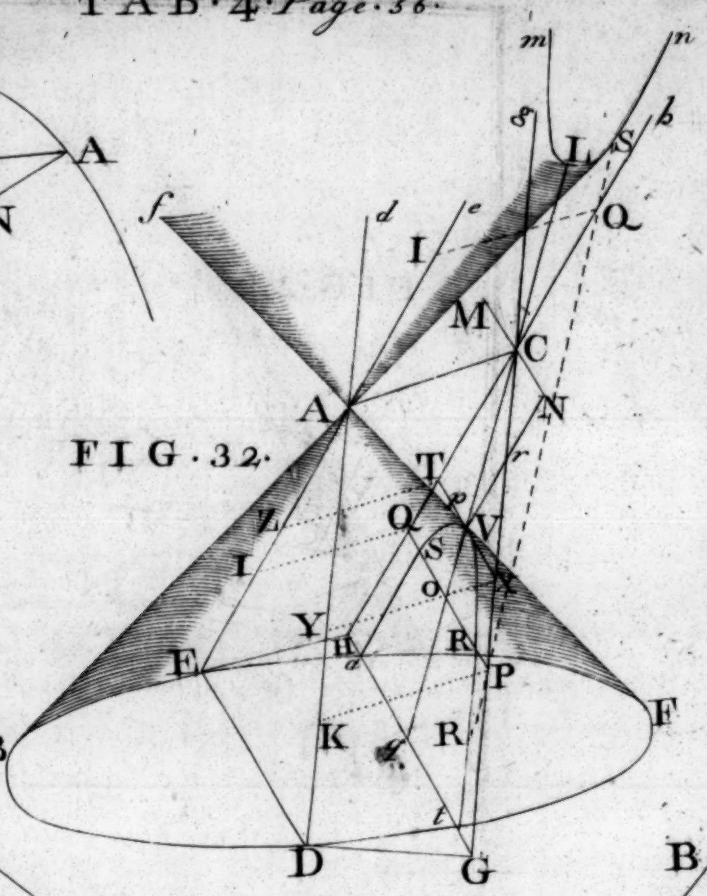


F

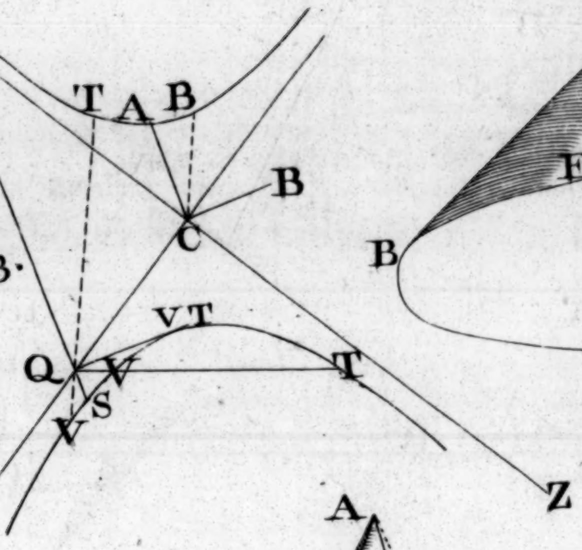


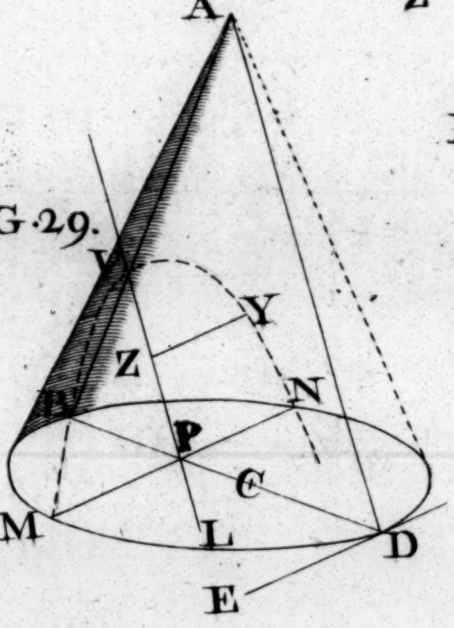


FIG·27·

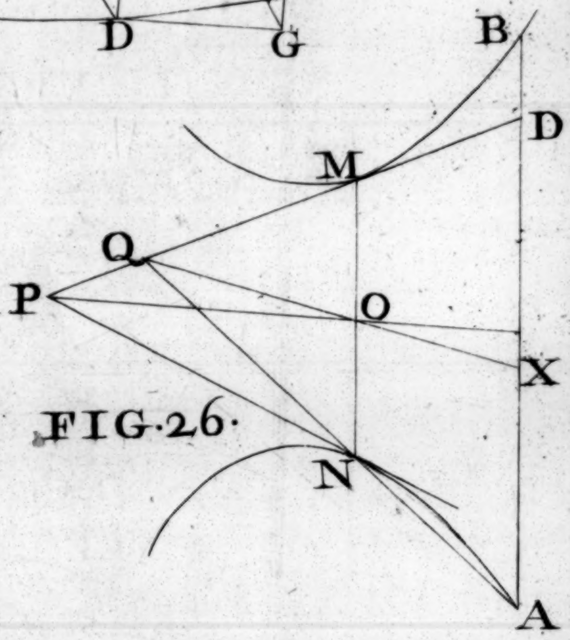


FIG·32·





FIG·29.



FIG·26·

7 AP 53

ex CA ad quadratum ex CL, & per Prop. 32. erit quadratum ex QP ad quadrata ex PC, MC ſimul, ut quadratum ex CL ad quadratum ex CM: ergo ex æquo, erit rectangulum FPE ad quadrata ex PC, CM ſimul, ut quadratum ex CA ad quadratum ex CM: pari ratione erit quadratum ex contingente PO ad quadrata ex PC, CM ſimul, ut quadratum ex CA ad quadratum ex CM. *Q. E. D.*

PROP. XLII.

Si duæ rectæ ſibi invicem ſint parallelæ & ambæ contingant aut ſecent, vel earum una contingat, & altera ſecet, Hyperbolam vel Hyperbolas oppoſitas, & occurrant rectæ aſymptoto parallelæ; quadrata ex earum ſegmentis inter rectam aſymptoto parallelam & contactus, vel rectangula ſub earum ſegmentis inter hanc rectam, & Hyperbolam vel Hyperbolas, erunt inter ſe, ut ſegmenta iſtius rectæ aſymptoto parellelæ intercepta inter ipſas parallelas, & punctum in quo iſta recta occurrit uni ex Hyperbolis.

NAM (per Cor. 1. & 3. Def. 25.) recta aſymptoto parallela eſt parallela lateri ſuperficierum conicarum in quas poſitæ ſunt Hyperbolæ, & uni ex Hyperbolis in unico puncto occurrit; ergo conſtat hæc Propoſitio per Prop. 19. & Cor. 1. ad Def. Sect.

Cor. I. Hinc ſi diameter tranſverſa LV Hyperbolæ, occurrat in O rectæ KH aſymptoto CY parallelæ occurrenti alteri aſymptoto CZ in P, & Hyperbolæ in E; erit rectangulum VOL contentum ſegmentis diametri inter vertices ejus & rectam KH, ad quadratum ex ſemidiametro CV, ut OE ſegmentum rectæ KH inter diametrum & Hyperbolam, ad ſegmentum EP ejuſdem rectæ inter Hyperbolam & aſymptoton CZ; ducatur enim per punctum P recta parallela diametro LV, occurrens Hyperbolis in R, S punctis: Fig. 36.

H tum

tum per hanc Propositionem erit rectangulum VOL ad rectangulum RPS sive (Prop. 39.) quadratum ex CV, ut OE ad EP.

Cor. II. Vel (manentibus jam positis) si diameter secunda MN occurrat ipsi KH in B; erit quadratum ex CB segmento diametri inter centrum & rectam KH una cum quadrato ex semidiametro CN, ad quadratum ex semidiametro CN, ut BE segmentum rectæ KH inter diametrum & Hyperbolam, ad PE segmentum ejusdem rectæ inter asymptoton CZ & Hyperbolam. Ducantur enim per puncta B, P rectæ AD, RS ordinatim applicatæ diametro MN, & sit LV diameter ipsi MN conjugata, & proinde parallela ejus ordinatis; tum (per Prop. 32.) erit quadratum ex CB una cum quadrato ex CN, ad quadratum ex CN, ut quadratum ex AB, ad quadratum ex CV; hoc est, ut rectangulum ABD, ad rectangulum RPS (39. huj.) hoc est, (per hanc Prop.) ut BE, ad PE.

PROP. XLIII.

Si a puncto in Hyperbola ducantur ad asymptotos duæ quævis rectæ, & ab alio quovis puncto in eadem, vel opposita Hyperbola ducantur ad asymptotos aliæ rectæ prioribus parallelæ; erit rectangulum contentum primo ductis æquale rectangulo contento reliquis ductis.

Fig. 37. SINT A, B puncta in Hyperbola vel oppositis Hyperbolis, & per A ducantur ad asymptotos rectæ AD, AE, & per B ducantur iis parallelæ BG, BF, erit rectangulum AD in AE æquale rectangulo BG in BF.

Nam ducatur recta AB occurrens asymptotis in punctis M, N & (per Prop. 36.) erunt segmenta AM, BN, & proinde AN, BM æqualia; tum propter æquiangula triangula ADM, BGM, erit AD ad BG, ut AM ad BM, sive ut BN ad AN, hoc est (propter æquiangula triangula BNF, ANE) ut BF ad AE, ergo erit AD

AD ad BG, ut BF ad AE, ideoque erunt rectangula DAE, FBG inter ſe æqualia. *Q. E. D.*

Cor. I. Hinc, ſi a duobus punctis A, B in Hyperbola, vel in oppoſitis Hyperbolis, ducantur duæ rectæ AD & BG ad eandem vel diverſas aſymptotos & alteri aſymptoto parallelæ; erit rectangulum contentum ductâ AD & abſciſſâ DC inter ipſam & centrum C, æquale rectangulo contento ductâ BG & abſciſſâ GC; nam completis parallelogrammis CDAE, CGBF, erunt rectangula DAE, FBG, hoc eſt, rectangula ADC & BGC inter ſe æqualia.

Cor. II. Et (iiſdem poſitis) quoniam æqualia ſunt rectangula DAE, FBG, erit DA ad BG ut BF ad AE; ſed æquiangula ſunt parallelogramma DAEC, FBGC, ideoque erunt inter ſe æqualia, (per 14. 6.)

Cor. III. Si a puncto quovis A in Hyperbola AVB, ducatur recta AD ad unam aſymptoton, & alteri parallela, & ſumatur in alterutra aſymptoto punctum P, a quo ducatur recta PO verſus adjacentem Hyperbolam parallela alteri aſymptoto, & ſit rectangulum CPO æquale rectangulo CDA; erit punctum O in Hyperbola verſus quam recta PO fuit ducta. Recta enim PO alicubi occurret Hyperbolæ adjacenti (Cor. 3. ad Def. 25.) & ſi ei non occurrat in O, eſſet (per Cor. 1.) rectangulum majus vel minus ipſo CPO æquale rectangulo CDA, contra Hypotheſin.

DEFINITIO XXVI.

SINT Hyperbolæ oppoſitæ quarum LV ſit diameter tranſverſa, & MN diameter ſecunda ipſi LV conjugata; & per Prop. 35. ſint duæ Hyperbolæ oppoſitæ KMS, HNX, quarum Fig. 38.

MN ſit diameter tranſverſa & LV diameter ſecunda ipſi MN conjugata; hæ quatuor Hyperbolæ dicuntur *Hyperbolæ conjugatæ*.

Cor. I. Patet Hyperbolis conjugatis idem eſſe centrum C, nempe interſectionem diametrorum LV & MN, & communes aſymptotos; nam manentibus quæ in definitione poſitæ fuerunt; jungatur VM & ducatur CY ipſam VM bifariam ſecans in D, et CZ ipſi VM parallela; & quoniam LV, MN ſunt diametri conjugatæ utriuſque Hyperbolæ TVO, KMS, rectæ CY, CZ ſunt aſymptoti Hyperbolæ TVO et ejus oppoſitæ, et etiam Hyperbolæ KMS ipſi TVO conjugatæ & ejus oppoſitæ HNX, per Cor. 3. 38. hujus.

Cor. II. Quoniam Hyperbolæ conjugatæ communes habent aſymptotos; patet ex propoſitione 36. quod ſi recta oppoſitis Hyperbolis terminata, contingat Hyperbolam iis conjugatam; in puncto contactus bifariam ſecabitur. Vel ſi occurrat Hyperbolæ conjugatæ in duobus punctis, ſegmenta ejus inter hanc Hyperbolam & Hyperbolas oppoſitas erunt æqualia.

PROP. XLIV.

Si ducatur diameter ſecunda cujuſvis Hyperbolæ; erunt vertices ejus in Hyperbolis iſti Hyperbolæ conjugatis.

Fig. 38. SINT Hyperbolæ conjugatæ, quarum ſunt LV, MN diametri communes conjugatæ, ut in definitione præcedente, & ſint aſymptoti communes CY, CZ, & jungatur VM aſymptoto CY occurrens in D, et ducatur BC*b* diameter ſecunda Hyperbolæ TVO; erunt vertices ejus B, *b*, in Hyperbolis conjugatis ipſi TVO.

Nam ducatur ſemidiameter CA ipſi CB conjugata, & jungatur AB occurrens aſymptoto CY in E, erit bifariam ſecta in E, & alteri aſymptoto CZ parallela (Cor. 1. Prop. 38.) & proinde parallela ipſi MV; propter æquales BE, EA erit rectangulum BEC æquale rectangulo

gulo AEC, hoc eſt VDC (per Cor. 1. Prop. præc.) ſive rectangulo MDC (ob æquales VD, DM) ergo cum punctum M ſit in Hyperbola KMS & rectæ MD, BE ſint parallelæ aſymptoto CZ, & rectangula MDC, BEC ſint æqualia, erit punctum B in eadem Hyperbola KMS (Cor. 3. Prop. præc.) et vertex ejus alter *b* erit in Hyperbola HNX ipſi KMS oppoſita.

Cor. I. Hinc ſi ad vertices duarum diametrorum conjugatarum CA, CB ducantur rectæ contingentes Hyperbolas conjugatas, ſibi invicem occurrent ad aſymptoton CY, cui recta jungens vertices A, B occurrit; nam per A ducatur recta contingens Hyperbolam TVO occurrens aſymptoto CZ in R, & CY in P, & jungatur PB occurrens aſymptoto CZ in Q; quoniam PAR contingit Hyperbolam, erunt PA, AR æquales (36. hujus) ergo propter parallelas RQ, AB (Cor. 1. Prop. 38.) æquales ſunt PB, BQ. Ergo recta PBQ contingit Hyperbolam in B (per Prop. 36.) & proinde contingentes per A, B ductæ occurrunt in puncto P ad aſymptoton CY.

Cor. II. Hinc etiam, diameter quævis ſecunda Hyperbolæ eſt diameter tranſverſa Hyperbolæ conjugatæ; & vice verſa.

PROP. XLV.

Si a duobus punctis in Hyperbolis conjugatis, ducantur ad eandem, vel diverſas aſymptotos, duæ rectæ aſymptotis parallelæ; erunt rectangula contenta ductis, & abſciſſis inter ipſas & centrum, æqualia.

SINT Hyperbolæ conjugatæ, quarum aſymptoti ſunt CZ, CY, Fig. 38. et a puncto in una Hyperbola A, ducatur AE ad aſymptoton CY, parallela ipſi CZ, et a puncto F in Hyperbola conjugata, ducatur FG ad unam aſymptoton, et alteri parallela; erunt rectangula AEC, FGC, inter ſe æqualia.

Jungantur

Jungantur enim V, M vertices diametrorum conjugatarum, erit jungens parallela uni aſymptoto, et ab altera bifariam ſecta in D, et (per Cor. 1. Prop. 43.) erunt rectangula AEC, VDC æqualia, ut et rectangula FGC, MDC; ſed rectangula VDC, MDC æquantur, et ergo rectangula AEC, FGC æqualia ſunt. *Q. E. D.*

Cor. I. Hinc, erunt parallelogramma AEC*e*, FGC*g*, æqualia, ut in Cor. 2. Prop. 43.

Cor. II. Hinc etiam, ſi duæ quævis rectæ PR, *pr*, contingant eandem Hyperbolam, vel oppoſitas, vel adjacentes Hyperbolas & occurrant aſymptotis in P, R, et *p*, *r*, punctis; triangula PCR, *p*C*r*, contenta inter contingentes et ſegmenta aſymptotorum, erunt inter ſe æqualia. Nam a punctis contactuum A, F, ducantur AE, A*e* et FG, F*g* aſymptotis parallelæ; tum propter PA, AR æquales, erunt PE, EC, et etiam C*e*, *e*R æquales: ergo triangulum PCR eſt duplum parallelogrammi AEC*e*; eodem modo oſtendetur triangulum *p*C*r* eſſe duplum parallelogrammi FGC*g*: ſed hæc parallelogramma æquantur (Cor. præc.) ergo ipſa triangula æquantur.

Cor. III. Hinc etiam, ſi recta Hyperbolis adjacentibus terminata, ſit uni aſymptoto parallela; erit ab altera bifariam ſecta. Sit enim recta AB Hyperbolis adjacentibus terminata & parallela aſymptoto CZ, et occurrat ipſi CY in E; quoniam per hanc Prop. rectangula AEC, BEC ſunt æqualia, erunt ipſæ rectæ AE, EB æquales, ut patet.

Cor. IV. Et contra, ſi AB Hyperbolis conjugatis terminata ſit bifariam ſecta aſymptoto CY; erit alteri aſymptoto CZ parallela. Nam ſi non, duci poteſt recta a puncto A ad punctum aliquod K in Hyperbola adjacente recta parallela ipſi CZ, hæc recta AK ab aſymptoto CY quoque bifariam ſecabitur (per Cor. præced.) ergo aſymptoton CY erit parallela rectæ jungenti duo puncta B, K in Hyperbola (per 2. 6.) quod fieri nequit: Cor. 3. ad Def. 25.

Cor. V. Ex hac Prop. et Cor. 2. Prop. 43. patet, quod ſi ducantur duæ rectæ a punctis in eadem Hyperbola, vel in duabus

ex

ex quatuor Hyperbolis conjugatis ad unam aſymptoton & alteri aſymptoto parallelæ; ipſæ ductæ erunt inter ſe reciproce ut ſegmenta abſciſſa inter ipſas et centrum: et proinde Hyperbola et aſymptoti in infinitum productæ ad ſeipſas proprius accedunt, & ad intervallum proveniunt minus quolibet dato intervallo.

Cor. VI. Si per punctum A in Hyperbola TAO, ducatur recta occurrens Hyperbolis conjugatis BMS, HNX in punctis K & H; rectangulum KAH erit duplum quadrati ex ſemidiametro CM quæ ipſi KH eſt parallela. Ducatur enim per A ſemidiameter CA, erit hæc ſemidiameter ſecunda Hyperbolarum BMS, HNX, (Cor. 2. 44. hujus) ergo per Prop. 41. rectangulum KAH erit ad quadratum ex CA bis ſumptum, ut quadratum ex CM ad quadratum ex ipſa CA: ergo rectangulum KAH eſt duplum quadrati ex CM.

PROP. XLVI.

Si per punctum in Hyperbola ducantur duæ rectæ indefinitæ aſymptotis parallelæ, & occurrentes cuivis diametro; erit ſemidiameter media proportionalis inter ſegmenta diametri intercepta inter centrum, & rectas quibus occurrit.

PER punctum A Hyperbolæ TVO, ducantur rectæ DE, FG aſymptotis CY, CZ parallelæ, & occurrant primum diametro tranſverſæ LCV in P, Q punctis, erunt CP, CV, CQ proportionales. Fig. 39.

Nam occurrat FG aſymptoto CY in X, & a punctis V, P, ducantur ad CY rectæ V*r*, PS parallelæ ipſi FG ſeu CZ, erit PS æqualis ipſi AX; propter parallelas erit CS ad C*r*, ut (SP ſeu) XA ad *r*V, hoc eſt (per Cor. 5. præc.) ut C*r* ad CX: ergo quoniam CS, C*r*, CX, ſint proportionales, erunt, propter parallelas, ipſæ CP, CV & CQ proportionales.

Occurrant

Occurrant nunc hæ rectæ DE, FG diametro ſecundæ MCN in K, H punctis, & ſit vertex ejus M in Hyperbola ipſi TVO conjugata, cui occurrat recta FG in puncto B, a quo ducatur BR parallela ipſi DE ſeu CY, & occurrens diametro MN in R, per caſum primum erunt CR, CM, CH proportionales: ſed propter parallelas, et rectas AX, XB æquales (per Cor. 3. præc.) erunt rectæ KC, CR æquales: ergo ipſæ CK, CM, CH ſunt proportionales. *Q. E. D.*

SCHOLIUM.

FIG. 39. *SI duæ rectæ indefinitæ DE, FG ſe invicem ſecent in A, & circa punctum quodvis datum C extra rectas DE, FG poſitum, revolvatur alia recta indefinita, & in hac revolvente, dum occurrit, ut in punctis P, Q lateribus anguli EAF extra quem ponitur C, vel anguli GAD huic verticalis, ſumatur punctum V ad eaſdem partes puncti C ad quas ſunt P, Q, ita ut ſegmenta CP, CV, CQ ſint ſemper proportionalia; erit* Locus *omnium pnnctorum V, Hyperbola TVO, tranſiens per A, cujus centrum eſt punctum datum C, & cujus aſymptoti ſunt ipſis DE, FG parallelæ, & cum iis tandem coincidet recta revolvens; & ſi interea ad contrarias partes puncti C ſumatur punctum L, ita ut CL ſit ſemper æqualis ipſi CV, erit* Locus *punctorum L, Hyperbola ipſi TVO oppoſita. Si vero in recta revolvente, dum occurrit ut in punctis K, H, lateribus anguli EAG intra quem ponitur C, ſumantur duo puncta M, N, ita ut ſegmenta CK, CM vel CN, & CH ſint proportionalia:* Loci *omnium punctorum M, N, erunt Hyperbolæ oppoſitæ prioribus Hyperbolis conjugatæ.*

PROP.

PROP. XLVII.

Si a Puncto parabolæ F ducatur ad diametrum BA recta FE ipsi ordinatim applicata, & recta Parabolam contingens, eidem diametro occurrens in D; erit ED segmentum diametri inter ordinatam & contingentem bifariam sectum in vertice ejus B. Fig. 40.

OCCURRAT enim ordinata FE producta Parabolæ iterum in L, et per punctum F ducatur diameter FG, ad quam ducantur rectæ LG, EC, BH parallelæ contingenti FD, erunt LG, BH ordinatæ diametro FG (Cor. 27. huj.) et erit EC æqualis ipsi BH; quoniam igitur est LF dupla ipsius EF, erit (2. 6.) GF dupla ipsius CF, et LG dupla ipsius EC sive BH, et ergo quadratum ex LG est quadruplum quadrati ex BH (4. 2.) est igitur abscissa GF quadrupla abscissæ HF (29. huj.) ideoque est CF dupla ipsius HF, et proinde est ED dupla ipsius BD; ergo ED segmentum diametri in vertice ejus B bifariam secatur. *Q. E. D.*

PROP. XLVIII.

Si a puncto Ellipseos F ducatur FE ordinatim applicata ad diametrum AB, & recta Ellipsim contingens eidem diametro occurrens in D; erit semidiameter CB media proportionalis inter CE, CD, segmenta sciz. diametri inter centrum & ordinatam, & inter centrum & contingentem. Fig. 41.

DUCANTUR enim per vertices diametri AB rectæ Ellipsim contingentes, et occurrentes contingenti per F ductæ, in punctis H, G; hæ contingentes erunt parallelæ ordinatæ FE (Cor. 1. 25. hujus;) in diametro AB sumatur CT æqualis ipsi CE, erunt etiam AT, EB æquales: Sed (per Cor. 5. Prop. 18. hujus &

22. 6.) eſt AH ad BG, ut HF ad FG ſive (propter parallelas) ut AE ad EB, erit igitur AE ad EB, ut AD ad BD: et ergo dividendo, erit TE ad EB, ut AB ad BD, & ſumendo dimidia antecedentium, erit CE ad EB, ut CB ad BD, & ergo convertendo, eſt CE ad CB, ut CB ad CD. *Q. E. D.*

PROP. XLIX.

Si a puncto Hyperbolæ ducatur ad diametrum recta ei ordinatim applicata & recta Hyperbolam contingens eidem diametro occurrens; erit ſemidiameter media proportionalis inter ſegmenta diametri, inter centrum & ordinatam, & inter centrum & contingentem.

Fig. 42. *Caſ.* 1. QUANDO ordinata ducitur ad diametrum tranſverſam. Sit Hyperbola cujus diameter tranſverſa eſt AB, & centrum C, & a puncto in ipſa F ducatur FE ordinatim applicata ad diametrum AB & contingens eidem diametro occurrens in D; erit CE ad CB, ut CB ad CD.

Ducantur enim per vertices diametri AB duæ contingentes occurrentes contingenti per F ductæ in punctis H, G quæ erunt ordinatæ FE parallelæ (Cor. 1. 25. huj.) & ſumatur CT æqualis ipſi CE, erunt etiam AT, BE æquales. Sed per Cor. 5. Prop. 18. hujus & 22. 6) eſt AH ad BG, ut HF ad GF, hoc eſt, (propter parallelas AH, GB, FE) ut AE ad BE, & ut AH ad BG, ita eſt AD ad DB; erit igitur AE ad BE ut AD ad DB & ergo componendo, TE erit ad BE, ut AB ad DB, & ſumendo dimidia antecedentium, erit CE ad BE, ut CB ad DB, & ergo convertendo, eſt CE ad CB, ut CB ad CD.

Caſ. 2. Quando ordinata ducitur ad diametrum ſecundam. A puncto Hyperbolæ F ducatur FO ordinata ad diametrum ſecundam MN, cui contingens per F ducta occurrit in P, & ſit AB diameter tranſverſa ipſi MN conjugata, occurrens contingenti FP in D,

D, & ipſi AB ducatur FE ordinatim applicata, erit ipſi CO parallela & æqualis.

Quoniam, per caſum præcedentem, ſunt EC, BC, DC proportionales, erit quadratum ex EC ad quadratum ex BC, ut EC ad DC (Cor. 20. 6.) ergo dividendo, erit rectangulum BEA ad quadratum ex BC, ut ED ad DC; ſed quadratum ex ordinata FE eſt ad quadratum ex ſemidiametro ſecunda CM, ut rectangulum BEA ad quadratum ex BC ut conſtat ex Def. 24. ergo quadratum ex FE eſt ad quadratum ex CM, (ut ED ad DC, hoc eſt,) ut ipſa FE ad CP: ergo FE, CM, CP ſunt proportionales (per converſ. Cor. 20. 6.) ergo ſunt CO, CM, CP proportionales. *Q. E. D.*

Corollaria ad duas præcedentes.

Cor. I. Si recta contingens Ellipſim aut Hyperbolam in puncto quovis F, occurrat ejus diametro AB (quæ in Hyperbola ſit tranſverſa) in D, & a contactu ducatur ordinata FE ad diametrum, erit rectangulum CED contentum ſegmentis diametri, inter ordinatam & centrum, & inter eandem & contingentem, æquale rectangulo AEB contento ſegmentis inter ordinatam & vertices diametri. Nam quoniam, (per præcedentes & 17. 6.) eſt rectangulum ECD æquale quadrato ex CB; ſi in Ellipſi utrinque auferaur quadratum ex CE, erit reliquum ſciz. rectangulum CED æquale reliquo rectangulo AEB (per 3. & 5. 2.) & in Hyperbola demptis hiſce æqualibus ſciz. rectangulo ECD & quadrato ex BC, a quadrato ex EC, erit reliquum rectangulum CED æquale reliquo rectangulo AEB, per 2. & 6. 2. Fig. 41, 42.

Cor. II. Occurrant jam contingens & ordinata a puncto F ductæ, diametro ſecundæ CM in P & O, & quoniam rectangulum PCO æquale eſt quadrato ex CM, addatur utrinque quadratum ex CO, & erit (3. 5.) rectangulum POC æquale quadratis ex CM, CO ſimul. Fig. 42.

Fig. 41, 42. Cor. III. Et rectangulum ADB, contentum ſegmentis inter contingentem & vertices diametri (quæ in Hyperbola ſit tranſverſa) erit æquale rectangulo CDE, contento ſegmentis inter contingentem & centrum, & inter eandem & ordinatam. Nam in Ellipſi, ablatis æqualibus ſciz. quadrato ex CB & rectangulo ECD, a quadrato quod fit ex CD, erit reliquum ADB æquale reliquo CDE (per 6. & 2. 2.) & in Hyperbola, ſi ab æqualibus ſciz. quadrato ex CB, & rectangulo ECD, auferatur quadratum ex CD, erit reliquum ADB æquale reliquo CDE, per 5. & 3. 2.

PROP. L.

Si duæ rectæ parallelæ contingentes Ellipſim, aut Hyperbolas oppoſitas, occurrant alii cuivis contingenti; rectangulum contentum ſegmentis parallelarum inter contactus, & contingentem cui occurrunt, erit æquale quadrato ex ſemidiametro, cui contingentes ſunt parallelæ. Et rectangulum contentum ſegmentis contingentis cui parallelæ occurrunt, ſciz. inter ejus contactum & ipſas parallelas, erit æquale quadrato ex ſemidiametro cui ipſa contingens eſt parallela.

Fig. 41, 42. CONTINGANT parallelæ AH, BG Ellipſim, aut Hyperbolas in punctis A, B, & occurrant contingenti per quodvis punctum F ductæ in H & G; erit rectangulum AH in BG æquale quadrato ex ſemidiametro CM ipſis AH, BG parallela. Et erit rectangulum HFG æquale quadrato ex CK ſemidiametro ipſi HG parallela.

Erit enim juncta AB diameter (Cor. 2. 22. huj.) & ipſi CM conjugata (Cor. 27. huj.) ſi in Ellipſi contingens HG ſit ipſi AB parallela, Propoſitio per ſe manifeſta eſt. Si autem non ſit parallela ipſi AB, occurrat ei in D & CM productæ in P, & a

puncto

puncto F ducantur FE, FO ordinatim applicatæ ad diametros AB, CM.

Pars 1. Quoniam per Cor. 3. præc. eſt rectangulum ADB æquale rectangulo CDE, erit AD ad CD, ut eſt ED ad BD (16. 6.) ergo, propter parallelas, erit AH ad CP, ut eſt EF ad BG, (2. 6.) & ergo rectangulum AH in BG æquatur rectangulo CP in EF ſive CO, hoc eſt, quadrato ex ſemidiametro CM: nam per duas præcedentes CO, CM, CP ſunt proportionales.

Pars 2. Quoniam eſt AH ad BG, ut HF ad FG (Cor. 5. 18. huj. & 22. 6.) erit rectangulum HFG ſimile rectangulo AH in BG et proinde eſt ad idem AH in BG, ut quadratum ex HF ad quadratum ex AH, hoc eſt, ut quadratum ex CK ad quadratum ex CM (per 31. et 40. huj.) ergo alternando, eſt rectangulum HFG ad quadratum ex CK, ut rectangulum AH in BG ad quadratum ex CM, hoc eſt, in ratione æqualitatis per partem primam. *Q. E. D.*

PROP. LI.

Si recta linea contingens Ellipſim, aut Hyperbolam in quovis puncto F, occurrat duabus diametris conjugatis AB & CM in punctis D, P; erit rectangulum PFD contentum ſegmentis contingentis inter contactum & diametros æquale rectangulo ex ſemidiametro CK, quæ ipſi contingenti eſt parallela. Fig. 41, 42.

DUCATUR enim a puncto contactus F, recta FE ordinatim applicata diametro AB, (quæ in Hyperbola ſit tranſverſa) et a terminis hujuſce diametri, ducantur contingentes quæ occurrant contingenti per F ductæ, in H, G punctis, erunt parallelæ ordinatæ FE, et diametro CM. Quoniam igitur per Cor. 1. 49. huj. eſt rectangulum CED æquale rectangulo AEB, erit CE ad EB, ut eſt AE ad ED; ergo, propter parallelas, erit PF ad FG, ut

eſt

HF ad FD et ergo rectangulum PFD est æquale rectangulo HFG, hoc est, quadrato ex semidiametro CK, per partem secundam præcedentis. *Q. E. D.*

Cor. Manifestum est, si recta PFD contingens Ellipsim, aut Hyperbolam, occurrat duabus diametris CB, CM, fueritque rectangulum PFD æquale quadrato ex semidiametro CK conjugata ei quæ per contactum F transit, quod diametri CB, CM, sunt conjugatæ.

PROP. LII. PROBL. IV.

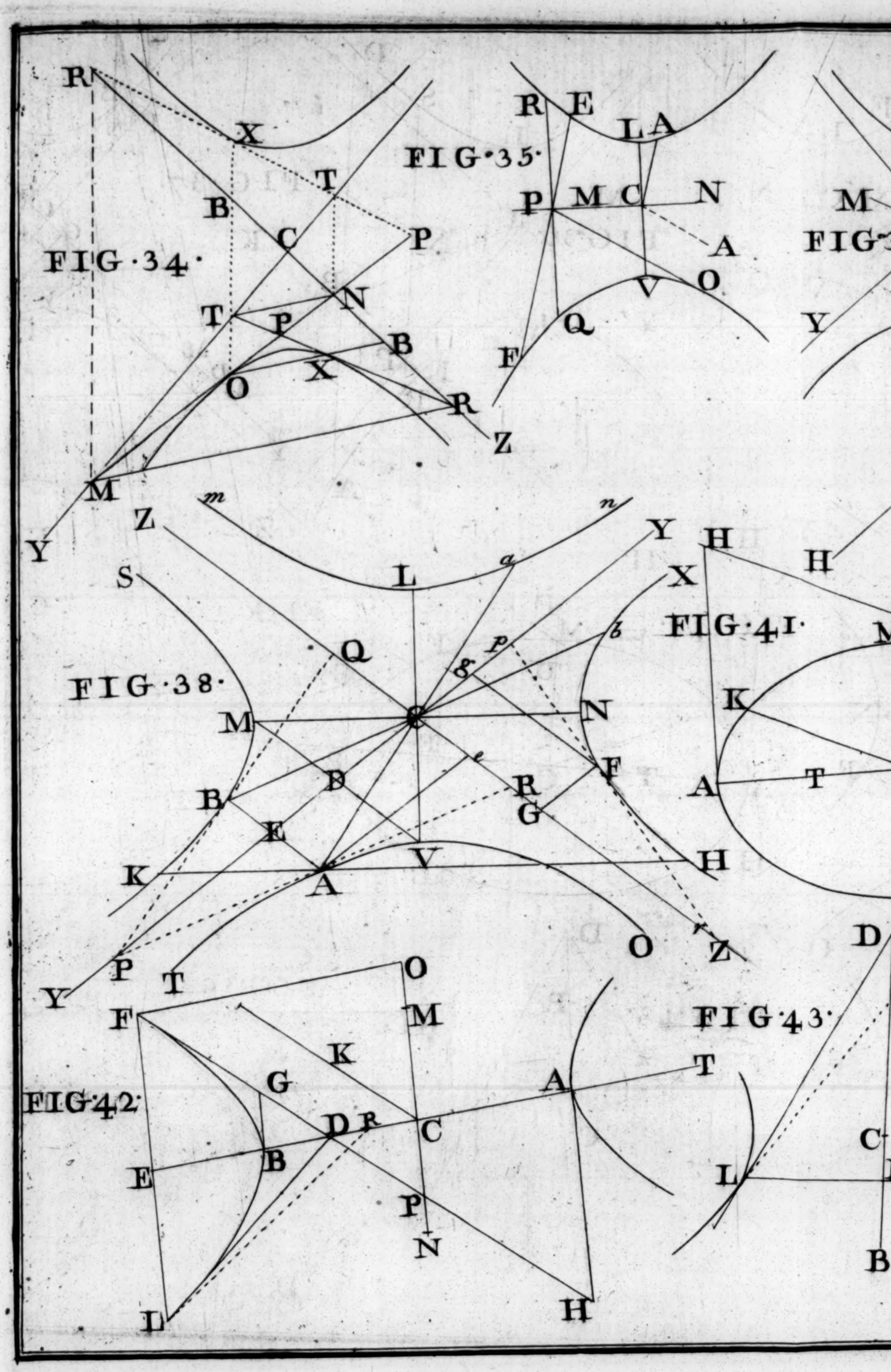
Datâ positione Sectione Conicâ, & puncto extra ipsam dato; ducere duas rectas, quæ contingant sectionem, vel sectiones oppositas, modo punctum datum non sit in asymptoto Hyperbolæ.

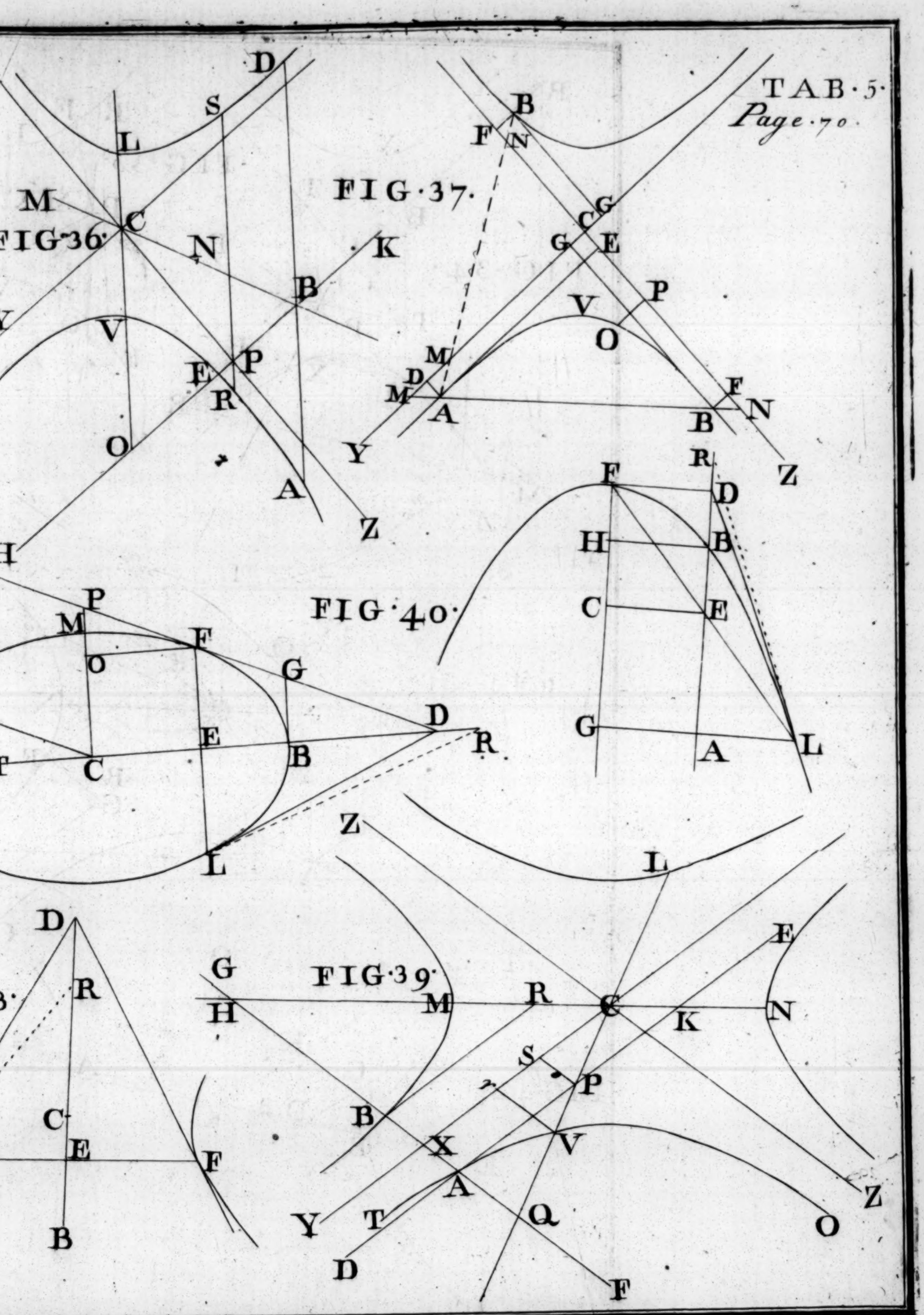
Fig. 40, 41, 42, 43. SIT sectio data FL, et punctum datum D; per D ducatur diameter sectioni occurrens in B, vel si fuerit diameter secunda Hyperbolæ sit ejus vertex seu terminus B. Si sectio sit Parabola, fiat BE æqualis ipsi BD, et per E ducatur FEL parallela ordinatim applicatis diametro BE, occurrens Parabolæ in L, F punctis; junctæ DL, DF sectionem contingent; si enim alterutra, puta DL non contingat, sit LR contingens diametro BE occurrens in R, erit (per 47. huj.) BR æqualis ipsi BE, hoc est ipsi BD, quod est absurdum.

Si autem sectio sit Ellipsis, aut Hyperbola; sit ejus centrum C, ipsis CD, CB inveniatur tertia proportionalis CE (ponenda ad partes centri contrarias iis ad quas est CD, si fuerit CD secunda diameter Hyperbolæ, secus ad easdem) perque punctum E ducatur recta FEL parallela ordinatim applicatis diametro CD, occurrens sectioni in L, F punctis; junctæ DL, DF sectionem, vel sectiones oppositas contingent.

Si enim alterutra, puta DL, non contingat, sit LR contingens, diametro CD occurrens in R: erunt CE, CB, CR, proportionales (per 48, 49. huj.) *Q. E. A.*

Si


FIG·34·
FIG·35·
FIG·38·
FIG·41·
FIG·42·
FIG·43·


TAB. 5.
Page. 70.
FIG. 36.
FIG. 37.
FIG. 40.
FIG. 39.

7 AP 53

Si punctum datum D sit in asymptoto Hyperbolæ, in hoc puncto duæ contingentes convenire nequeunt (Cor. 5. 39. hujus) methodus vero ducendi rectam, quæ Hyperbolam adjacentem contingat, ostensa fuit in Cor. 5 Prop. 36.

PROP. LIII.

Si duæ rectæ contingentes sectionem conicam vel sectiones oppositas sibi invicem occurrant, & per punctum in una contingente ducatur recta alteri parallela, occurrens rectæ jungenti contactus, & conveniens in duobus punctis cum sectione conica; erit quadratum ex segmento ejus inter contingentem & jungentem contactus, æquale rectangulo contento segmentis interceptis inter contingentem, & sectionem. FIG. 44. 45.

CONTINGANT rectæ AB, AC sectionem conicam vel sectiones oppositas in B, C punctis, jungatur BC & per punctum D in una contingente AC, ducatur recta alteri AB parallela, occurrens ipsi BC in G, et sectioni in E, F punctis; erit quadratum ex DG æquale rectangulo EDF.

Nam quoniam contingens AC occurrit parallelis FD, BA, rectangulum EDF contentum segmentis secantis, est ad quadratum ex contingente BA, ut quadratum ex DC ad quadratum ex AC, (per Cor. 6. 18. huj.) hoc est (ob similia triangula) ut quadratum ex DG ad quadratum ex BA: ergo rectangulum EDF et quadratum ex DG æquantur. *Q. E. D.*

COR. Occurrant sibi invicem in puncto A, duæ rectæ contingentes sectionem conicam, vel sectiones oppositas, si a quovis puncto P in una contingente AC, ducatur recta alteri contingenti parallela, occurrens jungenti contactus in L, & ab eodem P ducatur

quævis

quævis recta secans sectionem, vel oppositas sectiones in punctis R, Q; rectangulum RPQ & quadratum ex recta PL, erunt inter se, ut quadrata ex segmentis contingentium, quæ sunt ipsis PRQ, PL parallelæ, interceptis inter earum occursum & contactus; vel ut quadrata ex semidiametris quæ sunt ipsis PRQ, PL parallelæ.

Nam a puncto D in contingente AC ducantur duæ rectæ ipsis PRQ, PL parallelæ, secantes sectionem vel oppositas sectiones in punctis O, N, & E, F, & occurrat recta DEF, ipsi PL parallela, jungenti contactus in G: quoniam igitur contingens AC occurrit duabus parallelis secantibus, erit (per Cor. 4. 18. huj.) rectangulum RPQ ad rectangulum ODN, ut quadratum ex PC ad quadratum ex DC, hoc est (ob similia triangula) ut quadratum ex PL ad quadratum ex DG sive rectangulum EDF (per hanc Prop.) ergo alternando, rectangulum RPQ est ad quadratum ex PL, ut rectangulum ODN ad rectangulum EDF, hoc est per 18. hujus, ut quadrata ex segmentis contingentium, quæ sunt ipsis PRQ, PL parallelæ, interceptis inter earum occursum & contactus; vel ut quadrata ex semidiametris Ellipseos aut Hyperbolæ quæ sunt ipsis PRQ, PL parallelæ, per 31, & 40. hujus.

LEMMA II.

Fig 46. A Puncto E in recta quavis indefinita sumantur rectæ EA, ED ad easdem partes puncti E, & ab eodem puncto E sumatur recta EB cujus terminus B sit vel inter A & D vel ad alteras partes puncti E; si quadratum ex AB sit ad quadratum ex DB, ut ipsa AE ad DE; erit recta EB media proportionalis inter ipsas AE & DE.

Nam si non, a puncto E sumatur versus B recta EF, major vel minor ipsa EB, quæ sit media proportionalis inter AE & DE; quoniam igitur proportionales sunt AE, FE, DE, erit (convertendo & alternando) ut prima AE ad secundam FE, ita AF summa vel differentia primæ & secundæ, ad DF summam vel differentiam

secundæ

ſecundæ & tertiæ, ergo erit quadratum ex AF ad quadratum ex DF, ut quadratum ex AE ad quadratum ex FE, hoc eſt, ut ipſa AE ad tertiam DE, ſive (per conſtruc.) ut quadratum ex AB ad quadratum ex DB; erit igitur ipſa AF ad DF, ut AB ad DB, quod eſt abſurdum; ut per ſe manifeſtum eſt cum puncta F, B ſunt inter ipſa A, D; & ſi F, B ſint ad alteras partes puncti E, patet etiam quod ratio inter rectas inæquales AF, DF non eadem manebit ſi iſtis rectis addatur vel auferatur eadem recta FB. Ergo recta major vel minor ipſâ EB non eſt media proportionalis inter AE, DE; eſt igitur recta EB media inter ipſas.

PROP. LIV.

Si Parabolæ diameter, vel recta aſymptoto Hyperbolæ parallela, occurrat duabus contingentibus, & rectæ jungenti contactus; erit quadratum ex ſegmento ejus inter ſectionem & jungentem contactus, æquale rectangulo contento reliquis ejus ſegmentis; ſciz. inter ſectionem & contingentes.

CONTINGANT duæ rectæ MN, MO Parabolam, Hyperbolam, vel oppoſitas Hyperbolas in punctis N, O, ducatur recta TX quæ ſit diameter Parabolæ vel aſymptoto Hyperbolæ parallela, occurrens Parabolæ vel alterutri Hyperbolæ in E, contingentibus in A, D & jungenti contactus in B; erit quadratum ex EB æquale rectangulo AED. Fig. 47, 48.

Caſ. 1. Si rectæ contingentes Parabolam vel Hyperbolam ſibi invicem occurrant in M, a puncto D in quo TX uni e contingentibus occurrit, ducatur recta alteri contigenti parallela ſecans ſectionem in punctis P, L & jungentem contactus in K, quod ſemper fieri licet: per Prop. præc. quadratum ex DK eſt æquale rectangulo PDL, & propter parallelas AO, DK erit quadratum ex Fig. 47.

AB ad quadratum ex DB, ut quadratum ex AO ad quadratum ex DK ſive rectangulum PDL, hoc eſt (Prop. 19.) ut ipſa AE ad DE; ſed rectæ AE, BE, DE ſumptæ ſunt a puncto E ut in Lemmate præcedente, ergo ſunt proportionales per idem Lemma, & proinde quadratum ex BE eſt æquale rectangulo AED.

Fig. 48. *Caſ.* 2. Si rectæ contingentes Hyperbolas oppoſitas ſibi invicem occurrant in M; ducatur ab alterutro puncto A vel D, puta D, recta parallela alteri contingenti AO occurrens jungenti contactus in K, & per puncta A, D ducantur duæ rectæ ſibi invicem parallelæ ſecantes oppoſitas Hyperbolas in punctis G, H & P, L. Per Prop. 40. rectangulum GAH & quadratum ex AO erunt inter ſe ut quadrata ex ſemidiametris quibus rectæ GH, AO ſunt parallelæ, & per Cor. præc. rectangulum PDL & quadratum ex DK erunt inter ſe ut quadrata ex iiſdem ſemidiametris, ergo alternando, rectangulum GAH erit ad rectangulum PDL, ut quadratum ex AO ad quadratum ex DK ſive (ob parallelas AO, DK) ut quadratum ex AB ad quadratum ex DB; ſed (Prop. 19.) rectangulum GAH eſt ad rectangulum PDL, ut ipſa AE ad DE, & proinde quadratum ex AB eſt ad quadratum ex DB, ut AE ad DE, ergo proportionales ſunt rectæ AE, BE, DE (Lem. præc.) ideoque quadratum ex BE eſt æquale rectangulo AED.

Caſ. 3. Si vero rectæ AO, DN contingentes oppoſitas Hyperbolas fuerint ſibi invicem parallelæ, tum ipſorum quadrata eſſent inter ſe ut quadrata ex AB, DB ob ſimilia triangula ABO, DBN, & eſſent etiam inter ſe ut ipſæ AE, DE per Prop. 19. ergo eſſet quadratum ex AB ad quadratum ex DB, ut ipſa AE ad DE, ideoque eſſent rectæ AE, BE, DE proportionales & quadratum ex BE æquale eſſet rectangulo AED ut prius. *Q. E. D.*

Cor. I. Si recta TX Parabolæ diameter vel aſymptoto Hyperbolæ parallela occurrens ſectioni in E, conveniat in puncto A cum recta ſectionem contingente in O, & in B cum recta ſectionem vel oppoſitas

oppositas sectiones secante in punctis; O, N et a puncto E sumatur, extra sectionem in ipsa TX, recta DE quæ sit tertia proportionalis ipsis AE et BE; erit juncta DN contingens. Nam si non, recta contingens sectionem in N occurreret ipsi TX extra sectionem in aliquo puncto C diverso a puncto D, et proinde per hanc Prop. recta CE esset tertia proportionalis ipsis AE et BE, contra hypothesin: ergo recta DN continget sectionem in N.

Cor. II. Hinc si a puncto M, occursu duarum rectarum contingentium Parabolam, Hyperbolam, vel oppositas Hyperbolas in punctis N, O, ducatur ad jungentem contactus recta MF, quæ sit Parabolæ diameter, vel asymptoto Hyperbolæ parallela, bifariam secabitur a sectione in S. Nam si MS, FS non sint æquales; a puncto S sumatur extra sectionem in MF recta SR quæ sit tertia proportionalis ipsis MS, FS et (per Cor. præc.) juncta RN, vel RO, continget sectionem in N vel O (contra 16. hujus) ergo MS, FS sunt æquales.

In hocce corollario continentur Prop. 35. Lib. 1. et Prop. 30, 31. Libri 3. *Apollonii.*

SCHOLIUM.

SIT MNO triangulum cujus latera utrinque indefinite producuntur, & sit TX recta secans omnia latera istius trianguli, & moveatur ita ut sit sibi semper parallela, & in ea sumatur punctum E, ita ut quadratum ex segmento EB inter punctum E & datum latus trianguli NO, sit semper æquale rectangulo AED contento segmentis rectæ TX inter punctum E, & reliqua latera trianguli. Si recta TX, cum bifariam secet datum latus trianguli NO, transeat per angulum oppositum M, Locus *omnium punctorum E, erit Parabola, cujus diametri sunt parallelæ rectæ mobili TX, & quam rectæ MN, MO contingent in punctis N, O. Si vero recta mobilis bifariam secans latus NO, non transeat per angulum M;* Locus *omnium punctorum erunt Hyberbolæ oppositæ, quarum una asymptotos est rectæ TX parallela; & ista asymptotos facile invenitur sciz. ducendo rectam ipsi TX* Fig. 47, 48.

parallelam

parallelam cujus segmentum interceptum inter latera trianguli MN & MO bifariam secaretur a reliquo latere NO, ut patet (ex Cor. 3. *Prop.* 40.) *cum hæc asymptotos transeat inter puncta N, O, rectæ MN, MO contingent in punctis N, O oppositas Hyperbolas motu puncti E genitas, aliter contingent in istis punctis unam ex Hyperbolis oppositis motu puncti E genitis; recta ducta per M bifariam secans ipsam NO erit (per Prop.* 26.) *diameter, & occursus ejus cum asymptoto erit centrum Hyperbolarum; unde invenitnr altera asymptotos. Vel si recta mobilis TX occurrat duabus parallelis MO, MN & rectæ cuivis ON ipsas secanti, & in ipsa TX sumatur punctum E, ita ut quadratum ex EB segmento rectæ TX inter punctum E & rectam ON æquale sit rectangulo AED contento segmentis inter idem E & parallelas; punctum E motu suo describet Hyperbolas oppositas, quas contingent parallelæ in punctis O, N.*

PROP. LV.

Si a duobus datis punctis in Parabola, Hyperbola, vel Hyperbolis oppositis inflectantur ad tertium quodvis punctum in ista Parabola, vel alterutra Hyperbolarum duæ rectæ occurrentes rectæ positione datæ, quæ sit Parabolæ diameter, vel asymptoto Hyperbolæ parallela; segmenta hujusce rectæ, inter inflexas & punctum in quo sectioni occurrit, erunt semper inter se in eadem ratione, ubicunque in sectione cadit punctum ad quod rectæ inflectuntur.

FIG. 49, 50, 51. SINT N, M, duo puncta data in Parabola, Hyperbola, vel oppositis Hyperbolis, et sit recta TX diameter Parabolæ, vel parallela asymptoto Hyperbolæ, occurrens sectioni in puncto dato E, et a punctis N, M, inflectantur ad quodvis punctum O in ipsa Parabola, vel in alterutra Hyperbolarum duæ rectæ NO, MO occurrentes

currentes ipsi TX in punctis B, C, erunt abscissæ EB, EC, inter se in eadem ratione ubicunque in sectione sumatur punctum O.

Ducantur enim per tria puncta M, N, O, tres contingentes, quæ occurrant ipsi TX in tribus punctis F, D, A, & jungatur MN occurrens ipsi TX in G, constat ex Prop. præc. ipsas ED, EG, & EF esse proportionales.

Quoniam recta TX occurrit duabus contingentibus DN, AO in punctis D, A, & jungenti contactus in B, erit quadratum ex EB æquale rectangulo AED, (Prop. præc.) & similiter, quoniam eadem recta occurrit contingentibus MF, AO in punctis F, A, & jungenti contactus in C, erit quadratum ex EC æquale rectangulo AEF: ergo quadratum ex EB est ad quadratum ex EC, ut rectangulum AED ad AEF, hoc est, ut ED ad EF, sive ut quadratum ex ED ad quadratum ex EG media sciz. inter ipsas ED, EF, erit igitur ipsa EB ad EC, ut ED ad EG; sed propter puncta M, N, data & rectam TX positione datam, segmenta ED, EG manent semper eadem: ergo, translato puncto O per totam Parabolam, Hyperbolam, vel Hyperbolam oppositam, rectæ EB, EC segmenta ipsius TX inter inflexas & sectionem erunt inter se semper in eadem ratione, sciz. ut ipsæ ED, EG vel EG, EF. *Q. E. D.*

Est hæc (quatenus Parabolam respicit) Propositio quam Dom. *Fermat*. *Wallisio* demonstrandum proposuit in Epistola ad Dom. *Kenelm. Digby*, (vide p. 858. Tom. 2. Oper. Math. *Wallisii*,) eadem vero affectio Hyperbolis convenit, ut in hac demonstratione generali ostensum est.

PROP.

PROP. LVI.

Si ſectioni conicæ vel ſectionibus oppoſitis inſcribatur trapezium, ejuſque omnia latera indefinite producantur, & a puncto quovis in ſectione ducantur duæ rectæ parallelæ duobus trapezii lateribus adjacentibus; rectangula contenta ſegmentis harum rectarum inter punctum in ſectione, & oppoſita latera trapezii, erunt inter ſe, ut quadrata contingentium vel ſemidiametrorum quibus ipſæ rectæ ſunt parallelæ.

Caſ. 1. SIT ABdC trapezium ſectioni conicæ vel ſectionibus oppoſitis inſcriptum, & primum ſint duo latera ejus AC, B*d* parallela, & a puncto quovis in ſectione E, ducantur duæ rectæ lateribus adjacentibus AB, AC parallelæ, occurrentes oppoſitis lateribus trapezii in punctis Q, *n* & *b*, R; erunt rectangula QE*n*, *b*ER inter ſe, ut quadrata contingentium vel ſemidiametrorum, quibus ipſæ E*n*, E*b* ſunt parallelæ. Occurrat enim *b*ER, ſectioni iterum in T, & ducatur recta MK bifariam ſecans parallelas AC, B*d*, erit diameter ſectionis, & bifariam ſecabit in puncto V, tam rectam TE ſectione terminatam (per Cor. 6. & 5. Prop. 25.) quam rectam *b*R, terminatam rectis C*d*, AB, & parallelam rectis biſectis AC, B*d*; ergo æquales ſunt *b*E, TR, ergo rectangulum *b*ER æquale eſt rectangulo TRE & (propter parallellogramma) rectangulum QE*n* æquale eſt rectangulo ARB, ergo rectangula *b*ER, QE*n* ſunt inter ſe, ut rectangula TRE, ARB, hoc eſt, ut quadrata contingentium vel ſemidiametrorum quibus ipſæ rectæ E*b*, E*n* ſunt parallelæ, per Prop. 18. vel 31. & 40.

Fig. 52, 53.

Caſ. 2. Sit ABDC trapezium inſcriptum, cujus nulla latera ſunt parallela, & per punctum in ſectione E, ducantur duæ rectæ ipſis AB, AC parallelæ, occurrentes oppoſitis lateribus trapezii in punctis

Q, N,

Q,N, & H, R, erunt rectangula HER, QEN inter ſe ut quadrata contingentium vel ſemidiametrorum quibus ipſæ HE, EN ſunt parallelæ.

Ducatur enim per B recta lateri AC parallela, ſectioni iterum occurrens in *d*, & rectæ EN in *n*, occurrat recta jungens *d*, C ipſi EH in *h*, & per punctum D ducatur recta lateri AC parallela, ſectioni iterum occurrens in F, & lateri AB in G, & junctæ *d* C in S; ducatur recta KM biſariam ſecans parallelas AC & B*d*, erit diameter ſectionis & biſariam ſecabit in O tam rectam DF ſectione terminatam (ut in caſu præcedente) quam rectam SG ipſis AC, B*d* parallelam, ergo æquales ſunt SD & FG: propter ſimilia triangula HC*h*, DCS, erit H*h* ad (SD ſive) FG, ut (C*h* ad CS, hoc eſt ut RA ſive) EQ ad AG; & propter ſimilia triangula NB*n*, GDB, erit (*n*B ſive) ER ad DG, ut N*n*, ad BG; ergo ducendo antecedentes primi ordinis proportionalium in antecedentes ſecundi & conſequentes in conſequentes, erit rectangulum H*h* in ER, ad rectangulum DGF, ut rectangulum EQ in N*n* ad rectangulum AGB; ergo alternando erunt rectangula H*h* in ER, & EQ in N*n* inter ſe ut rectangula DGF & AGB, hoc eſt ut quadrata contingentium, vel ſemidiametrorum quibus ipſæ FG, AG vel ipſæ HE, EN ſunt parallelæ, (per Prop 18. 31. & 40.) & per caſum præcedentem rectangula *h*E in ER, & *n*E in EQ ſunt inter ſe in hac eadem ratione, ergo ſummæ vel differentiæ horum rectangulorum, hoc eſt, rectangula HER, QEN erunt inter ſe in hac eadem ratione.

Q. E. D.

Tenet etiam Propoſitio, quamvis in primo caſu recta *h*ER ducta ipſis AC, B*d* parallela, contingat ſectionem in E; tum enim coeuntibus punctis E, T, contactus E eſſet ad verticem diametri ſectionis MK, & rectangulum *h*ER vel TRE fit quadratum ex *h*E, vel ER; & ſimiliter in caſu ſecundo coeuntibus punctis D, F rectangulum DGF fit quadratum ex contingente DG vel DS.

Cor. I.

Cor. I. Hinc, manentibus punctis A, B, D, C; puncto E per totam ſectionem, vel ſectionem oppoſitam tranſlato, rectiſque per id ductis ſervantibus priorem parallelifmum rectis AB, AC, ratio rectangulorum HER, QEN, eadem ſemper manebit.

Cor. II. Vel manentibus punctis A, B, C, E & rectis per E ductis; puncto D (hoc eſt rectarum CD, BD interſectione) per ſectionem, vel ſectionem oppoſitam tranſlato, ratio rectangulorum HER, QEN eadem ſemper manebit, & ergo (quoniam data ſunt eorum latera ER, QE,) ratio rectarum HE, NE eadem ſemper manebit.

Fig 52. Cor. III. Sectio conica non occurrit ſectioni conicæ vel ſectionibus oppoſitis in punctis pluribus quam quatuor. Nam ſi fieri poteſt, tranſeant duæ ſectiones conicæ per quinque puncta A, B, D, C, E, & (omnibus ſupra poſitis manentibus) per punctum B ducatur recta utraſque ſectiones ſecans in punctis *d*, P jungatur C*d* occurrens ipſi HE in *h*, & CP occurrens eidem HE in L; quoniam puncta *d*, D, ſunt in eadem ſectione per puncta A, B, C, E, tranſeunte, erunt rectæ *h*E, *n*E, inter ſe ut ipſæ HE, NE, (per Cor. præc.) & ſimiliter cum puncta P, D, ſunt in eadem ſectione per A, B, C, E tranſeunte, erunt etiam rectæ LE, *n*E, inter ſe ipſæ HE, NE, ergo æquales ſunt rectæ *h*E, LE, quod eſt abſurdum. Nam puncta *h* et L ſunt ad eaſdem partes puncti E; conſtat igitur Corollarium.

Fig. 54. Cor. IV. Si ſectioni conicæ poſitione datæ inſcribatur trapezium ABCD, cujus latera poſitione dantur; et a puncto quovis in ſectione E ducantur rectæ EF, EG, EH, EK, ad quatuor trapezii latera, datos cum ipſis angulos comprehendentes; erunt rectangula FEH, GEK, contenta rectis ad oppoſita latera ductis, ad ſe invicem in ratione data.

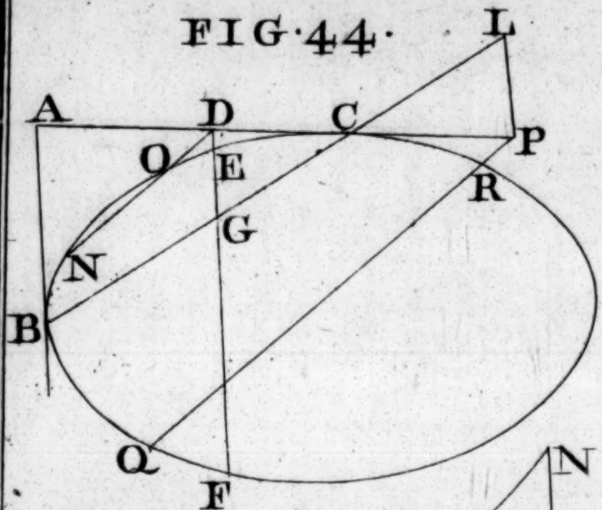
Nam a puncto E, ducantur rectæ EL, EO, parallelæ duobus trapezii lateribus adjacentibus ſciz. ipſis BC, BA; occurrantque lateribus oppoſitis in L, M et N, O punctis. Quoniam igitur in triangulo,

triangulo ELF, datus eſt ex Hypotheſi angulus LFE, et eſt angulus ELF æqualis angulo dato CBA, ſpecie dabitur triangulum ELF (per 40. Dat. Euclidis) ergo datur ratio FE ad EL; eodemque modo in triangulo EMH, dabitur ratio EH, ad EM; quare datur ratio ex hiſce compoſita, hoc eſt (per 23. 6.) ratio rectanguli FEH ad rectangulum LEM.

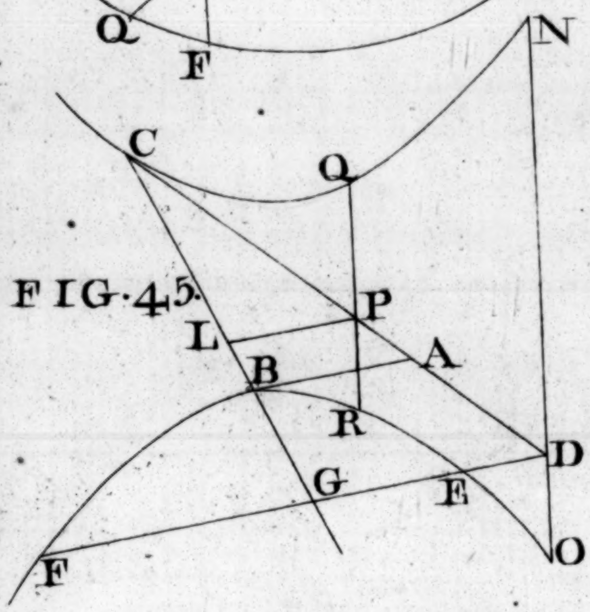
Eodem modo oſtendetur rationem rectanguli OEN ad rectangulum GEK, datam eſſe. Sed datur ratio rectanguli LEM ad rectangulum OEN (per Cor. 1.) ergo, quoniam oſtenſum eſt datam eſſe rationem rectanguli FEH ad ipſum LEM, et rationem ipſius LEM ad OEN, ipſiuſque OEN ad rectangulum GEK; dabitur (per 8. Dat. Euclidis) ratio rectanguli FEH, ad rectangulum GEK.

In propoſitione et hocce Corollario fuſius demonſtrantur omnes caſus Lemmatis 17. lib. 1. Phil. Nat. Princ. Math.

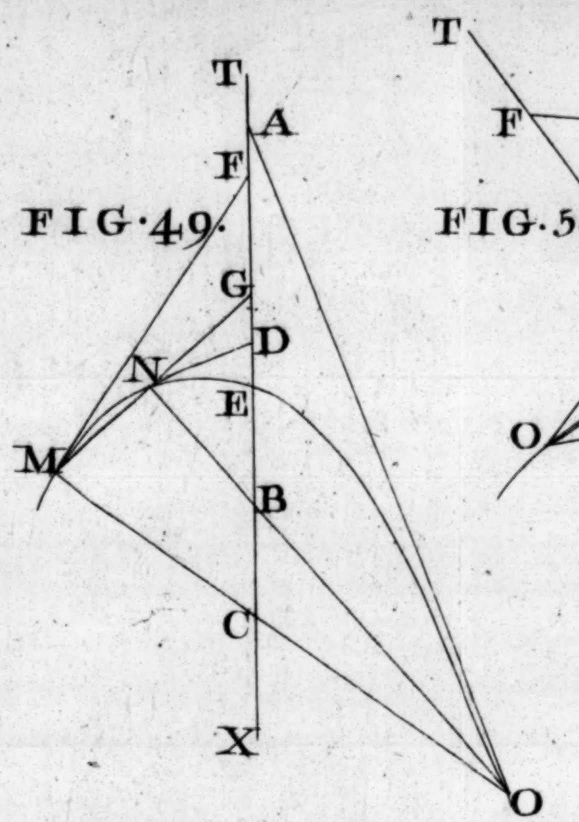
FIG·44·



FIG·45.

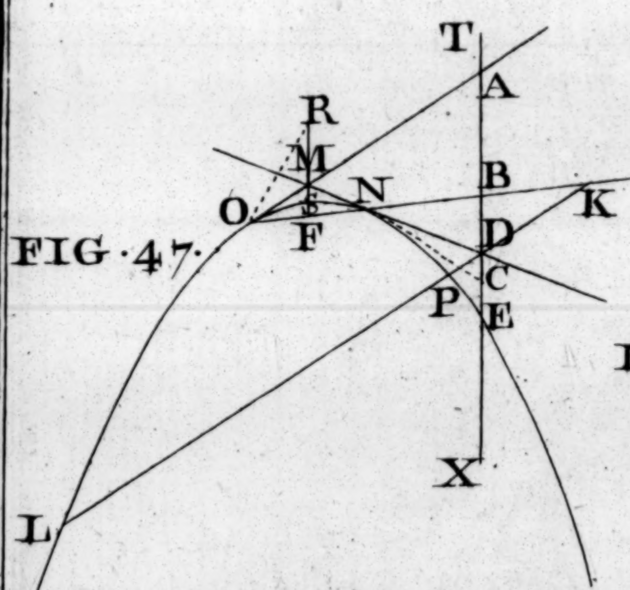


FIG·49.

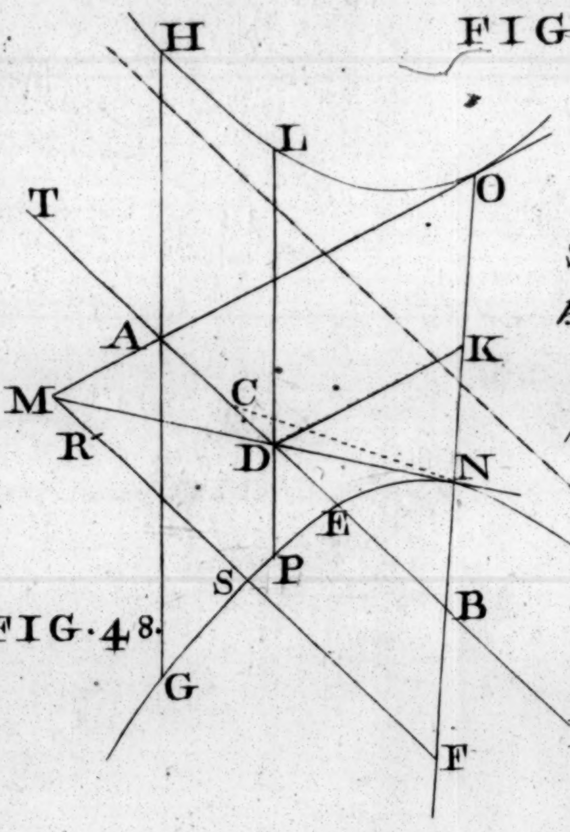


FIG·5

FIG·47·

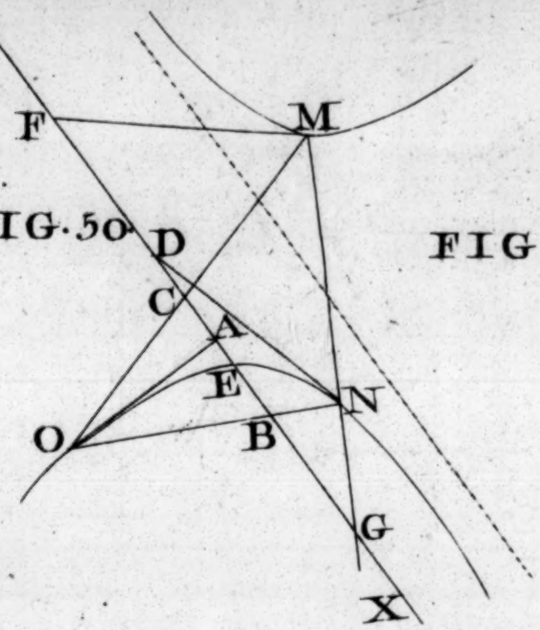


FIG·48·

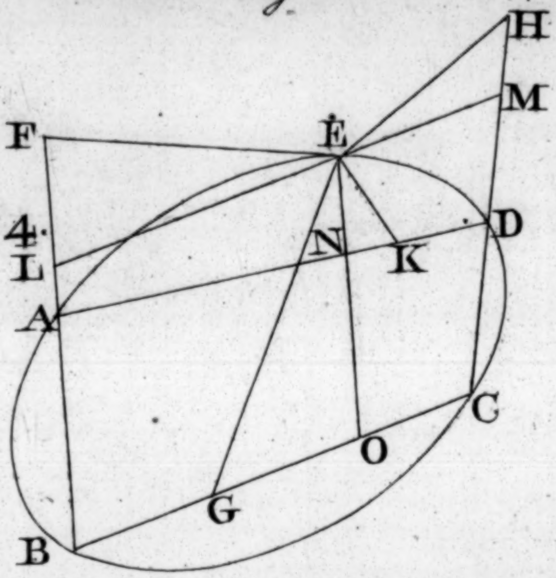


FIG

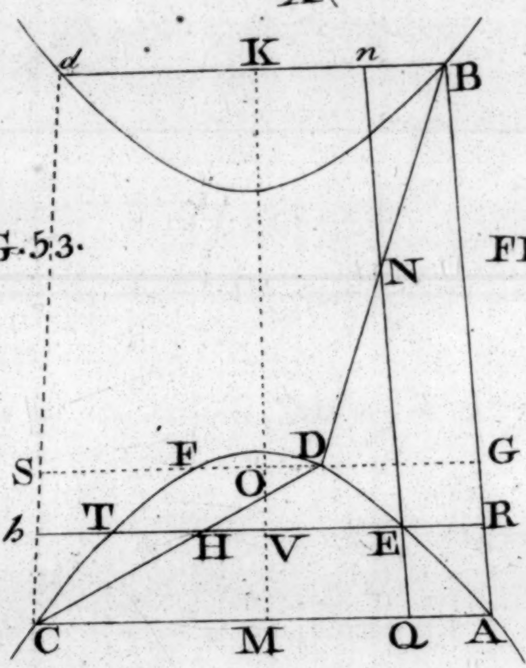
TAB·6· *Page*·82·



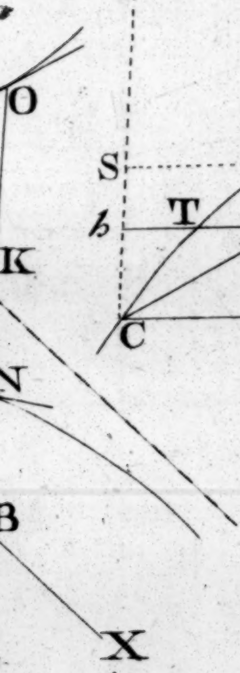
IG·50

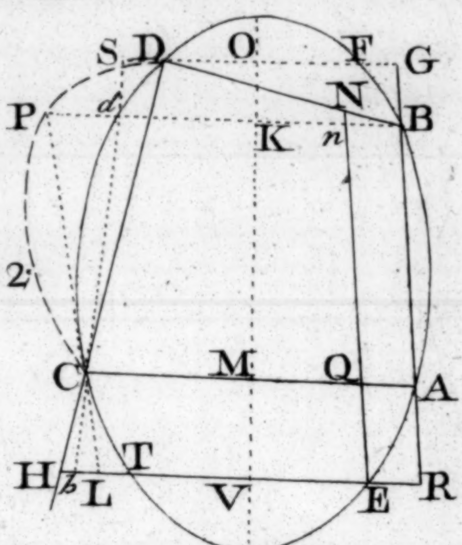


FIG·54·

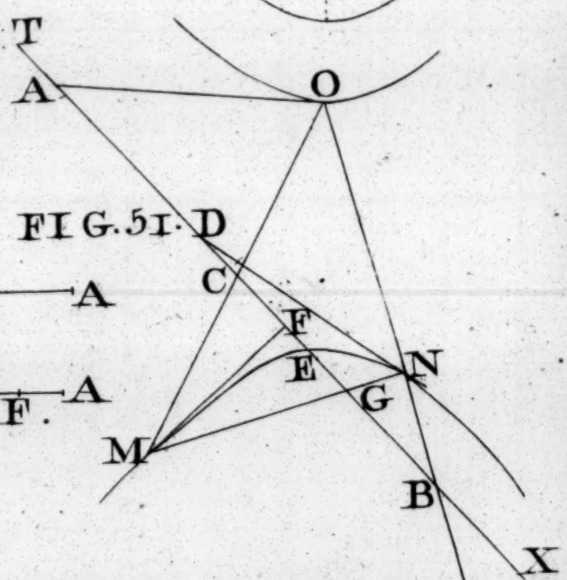


FIG·53·

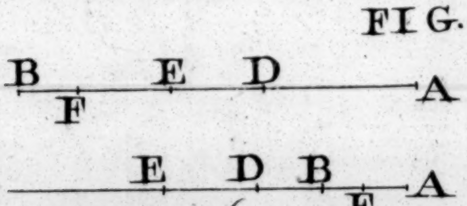




FIG·52·



FIG·51·



FIG·46·

SECTIONUM CONICARUM

LIBER SECUNDUS.

De Affectionibus ex quibus singulæ Sectiones Conicæ sua nomina sortiuntur, deque ipsarum parametris, axibus, focis & descriptionibus in plano.

DEFINITIONES I, & II.

I. SI a puncto Parabolæ ducatur ad diametrum recta ei ordinatim applicata; recta, quæ est tertia proportionalis abscissæ et huic ordinatæ, dicitur *Latus rectum*, sive *Parameter* istius diametri.

II. Recta, quæ est tertia proportionalis duabus diametris conjugatis Ellipseos, aut Hyperbolæ, dicitur *Latus Rectum*, sive *Parameter* istius diametri, quæ prima est trium proportionalium.

Cor. I. Si a puncto Ellipſeos aut Hyperbolæ ducatur ad diametrum (quæ in Hyperbola eſt tranſverſa) recta ei ordinatim applicata; rectangulum contentum abſciſſis diametri inter vertices ejus, & ordinatam, erit ad quadratum ex ordinata, ut ipſa diameter ad ejus parametrum. Nam per Cor. 1. 31. & Def. 24. lib. 1. hocce rectangulum eſt ad quadratum ex ordinata, ut quadratum ex ipſa diametro ad quadratum ex ejus conjugata, hoc eſt, ut ipſa diameter ad ejus parametrum, per Def. præc. & Cor. 20. 6.

Cor. II. Si a puncto Hyperbolæ ducatur ad diametrum ſecundam recta ei ordinatim applicata; erit ſumma quadratorum ex ſemidiametro ſecunda, et ejus ſegmento inter centrum & ordinatam, ad quadratum ex ordinata, ut (quadratum ex iſta diametro ſecunda, ad quadratum ex diametro ipſi conjugata per Prop. 32. lib. 1. hoc eſt ut) ipſa diameter ſecunda ad ipſius parametrum per Def. præc. & Cor. 20. 6.

PROP. I.

Quadrata rectarum quæ diametro Parabolæ ordinatim applicantur æqualia ſunt rectangulis contentis diametri abſciſſis & ejus parametro.

Fig. 1. A Puncto Parabolæ B ducatur recta BG ordinatim applicata diametro FL cujus vertex eſt F, & ſit recta P tertia proportionalis abſciſſæ GF & ordinatæ BG, erit hæc parameter diametri FL per Def. 1. hujus, & erit quadratum ex BG æquale rectangulo GF in rectam P; ſi nunc ducatur quævis alia recta DL ordinatim applicata diametro FL, per Prop. 29. lib. 1. quadratum ex DL eſt ad quadratum ex BG, ut LF ad GF, hoc eſt, ut rectangulum LF in P, ad rectangulum GF in P; ergo quadratum ex DL eſt ad rectangulum LF in P, ut quadratum ex BG ad rectangulum GF in P, hoc eſt, in ratione æqualitatis. Et inde *Apollonius* hanc lineam *Parabolam* nominavit. *Q. E. D.*

Cor.

Cor. I. Si a puncto G in diametro FL Parabolæ ducatur recta GB parallela rectis ordinatim applicatis isti diametro, & quadratum ex GB sit æquale rectangulo contento abscissâ GF sciz. inter ipsam GB, & verticem diametri F, & parametro ejusdem diametri; erit punctum B in Parabola, ut patet.

Cor. II. Si recta AB Parabolâ terminata ordinatim applicetur diametro FL, & abscissa FG, inter ipsam & verticem diametri, sit quarta pars parametri ejusdem diametri FL; erit recta AB æqualis ipsi parametro. Nam per hanc propositionem AG sciz. dimidium ipsius AB, erit media proportionalis inter parametrum & abscissam GF sciz. quartam partem parametri; ergo AG, est dimidium ipsius parametri, & ergo AB est ipsi parametro æqualis.

PROP. II.

Si recta Parabolam contingens occurrat ipsius diametro; quadratum ex segmento inter contactum & diametrum erit æquale rectangulo contento segmento diametri inter verticem ejus & contingentem, & parametro diametri quæ per contactum transit.

CONTINGAT recta FR Parabolam in F, & occurrat diametro ED in R, & ducatur FG diameter per contactum, sitque ejus parameter recta P; quadratum ex FR erit æquale rectangulo DR in P. Fig. 1.

Ducatur enim a vertice diametri ED recta DL ordinatim applicata diametro FG, erit parallela & æqualis contingenti FR, & abscissa ejus LF erit æqualis ipsi DR: ergo quoniam per præcedentem quadratum ex DL est æquale rectangulo LF in P, erit quadratum ex FR æquale rectangulo DR in P. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. III.

Si recta ſecans Parabolam occurrat ipſius diametro; rectangulum contentum ejus ſegmentis inter diametrum & Parabolam, erit æquale rectangulo contento ſegmento diametri inter verticem ejus & ſecantem, & parametro diametri cui ipſa ſecans ordinatim applicatur.

Fig. 1. SECET recta Parabolam in punctis A, B, & occurrat diametro ED in E, & ſit FG diameter cui AB ordinatim applicatur, ejuſque parameter P; erit rectangulum AEB æquale rectangulo ED in P.

Ducatur enim per verticem diametri FG recta Parabolam contingens, & occurrens diametro ED in R, erit parallela ſecanti AB (per Cor. 1. 25. lib. 1.) et ergo per Cor. 19. lib. 1. rectangulum AEB eſt ad quadratum ex FR, ut ED ad DR, ſive ut ED in P ad DR in P; ergo permutando, rectangulum AEB eſt ad rectangulum ED in P, ut quadratum ex FR ad rectangulum DR in P, hoc eſt, in ratione æqualitatis, per præcedentem.

Corollaria ad duas præcedentes.

Cor. I. Si duæ rectæ Parabolam contingentes ſibi invicem occurrant; quadrata ex earum ſegmentis inter contactus & occurſum; erunt ad ſe invicem ut parametri diametrorum, quæ per contactus tranſeunt. Nam (ductâ diametro per occurſum contingentium) quadratum ex alterutra contingente erit æquale rectangulo contento parametro diametri quæ per ejus contactum tranſit, & eâdem rectâ ſciz. ſegmento diametri inter ipſius verticem, & occurſum contingentium.

Cor. II. Et ſimiliter ſi duæ rectæ Parabolam ſecantes ſibi invicem occurrant; rectangula contenta ſegmentis ſecantium inter earum

occurſum

occurſum, & Parabolam, erunt ad ſe invicem ut parametri diametrorum, quibus ipſæ ſecantes ordinatim applicantur, ut patet per Prop. præc.

Cor. III. Vel ſi recta Parabolam contingens occurrat ſecanti; patet ex duabus præcedentibus, quod quadratum ex ſegmento contingentis inter occurſum et contactum ejus, erit ad rectangulum contentum ſegmentis ſecantis inter occurſum & Parabolam, ut parameter diametri quæ per contactum tranſit ad parametrum diametri cui ipſa ſecans ordinatim applicatur.

Cor. IV. Quoniam rectangulum AEB contentum ſummâ & differentiâ ordinatarum BG, DL æquale eſt rectangulo contento parametro P & ED differentiâ abſciſſarum; erit parameter alicujus diametri ad ſummam duarum ordinatarum ut earum differentia ad differentiam abſciſſarum.

PROP. IV.

Si a puncto Ellipſeos ducatur ad diametrum AB recta FG ei ordinatim applicata; erit quadratum ex ordinata æquale rectangulo contento unâ abſciſſâ GB & parte parametri diametri AB, quæ eſt ad totum, ut altera abciſſa AG ad diametrum AB. Fig. 2.

A Diametri vertice B ducatur recta BH diametro perpendicularis, ipſiuſque parametro æqualis; jungatur AH & a puncto G ducatur recta parallela ipſi BH, occurrens ipſi AH in K, & compleatur rectangulum BGKL; erit quadratum ex FG huic rectangulo æquale.

Nam per Cor. 1. ad Def. 2. rectangulum AGB eſt ad quadratum ex FG, ut diameter AB ad parametrum ejus BH, ſive propter parallelas, ut AG ad KG, hoc eſt, ut idem rectangulum AGB ad rectangulum KGB: ergo quadratum ex FG eſt æquale rectangulo KGB

KGB contento abſciſſâ GB, & rectâ KG quæ eſt ad parametrum BK, ut altera abſciſſa AG ad diametrum AB.

Cor. Compleantur rectangula KLHM, ABHN, & manifeſtum eſt, quod quadratum ex ordinata FG deficit a rectangulo GH contento abſciſſâ GB et parametro diametri AB, figurâ KH ſimili & ſimiliter poſitâ ipſi AH, quæ continetur diametro AB ejuſque parametro BH. Propter hunc defectum *Apollonius* hanc lineam *Ellipſim* nominavit.

PROP. V.

Fig. 3. Si a puncto Hyperbolæ ducatur ad diametrum tranverſam AB, recta FG ei ordinatim applicata; erit quadratum ex ordinata æquale rectangulo contento abſciſſâ minori GB, & rectâ quæ eſt ad parametrum diametri AB, ut altera abſciſſa AG ad ipſam diametrum AB.

A Diametri vertice B ducatur recta BH diametro perpendicularis, ejuſque parametro æqualis; jungatur AH, & a puncto G ducatur recta parallela ipſi BH, occurrens ipſi AH, in K, & compleatur rectangulum KGBL; erit quadratum ex FG huic rectangulo æquale.

Nam per Cor. 1. ad Def. 2. rectangulum AGB eſt ad quadratum ex FG, ut diameter AB ad parametrum ejus BH, ſive propter parallelas, ut AG ad KG, hoc eſt, ut idem rectangulum AGB ad rectangulum KGB; ergo quadratum ex FG eſt æquale rectangulo KGB contento minori abſciſſâ GB, & recta KG quæ eſt ad parametrum BH, ut major abſciſſa AG ad diametrum AB: *Q. E. D.*

Cor. Compleantur rectangula KLHM, ABHN, & manifeſtum eſt, quod quadratum ex ordinata FG excedit rectangulum GH, contentum abſciſſâ GB & Parametro diametri AB, figurâ ſimili & ſimiliter

ſimiliter poſitâ ipſi AH quæ continetur diametro AB ejuſque Parametro BH. Propter hunc exceſſum, *Apollonius* hanc lineam *Hyperbolam* nominavit.

PROP. VI. PROBL. I.

Datâ poſitione Parabolâ, invenire axem ejus; & unicum eſſe axem oſtendere.

SIT Parabola FBL, inveniatur quævis diameter VO, & per punctum X infra verticem ejus ducatur recta ipſi VO perpendicularis, & Parabolæ occurrens in F, L; ſi recta FL bifariam ſecetur in X erit diameter VO axis per definitionem 22. lib. 1. Sed ſi non, ducatur alia diameter AB bifariam ſecans ipſam FL in E, erit hæc diameter axis, quia ordinatam FL ſecat ad angulos rectos, nam AB eſt parallela ipſi VO. Fig. 4.

Si vero duæ diametri eſſent axes, recta Parabolâ terminata & utrique perpendicularis, eſſet utrique ordinatim applicata, quod eſt abſurdum: ergo eſt unus axis tantum cujuſvis Parabolæ. *Q. E. D.*

PROP. VII. PROBL. II.

Datis poſitione & magnitudine duabus diametris conjugatis Ellipſeos aut Hyperbolæ; axes invenire, & duos tantum eſſe axes in utraque ſectione oſtendere.

SINT rectæ FL, GH, non ſibi invicem perpendiculares, diametri conjugatæ Ellipſeos aut Hyperbolæ, & centrum C; per F verticem diametri, quæ in Hyperbola eſt tranſverſa, ducatur recta FV ipſi GH parallela, & ab eodem F ſumatur in diametro FL ſegmentum FK (verſus centrum in Hyperbola, ad partes autem contrarias in Ellipſi) ita ut rectangulum CFK ſit æquale quadrato ex CG, & bifariam ſectâ CK in P, ducatur PQ ipſi KC perpendicularis, Fig. 5, 6.

cularis,

cularis, occurrens rectæ FV in Q; tum centro Q describatur circulus transiens per C & K, & occurrens rectæ FV in D, O punctis; erunt junctæ CD, CO axes.

Nam per Cor. 27. lib. 1. recta FV continget sectionem cujus diametri conjugatæ sunt FL, GH, & propter circulum, rectangulum DFO est æquale rectangulo CFK, hoc est, quadrato ex semidiametro CG (per constructionem) ergo CD, CO sunt diametri conjugatæ (Cor. 51. lib. 1.) & se invicem ad angulos rectos secant, ob angulum DCO in semicirculo rectum, & proinde sunt axes (Def. 22. lib. 1.) nam ordinatas suas ad angulos rectos secant: vertices axium hoc modo inveniuntur; a puncto F ducatur recta FE ad unum axem CD, & alteri parallela, & sint CD, CB, CE proportionales & sumatur CA æqualis ipsi CB, erunt B & A vertices axis CD per 48, 49. lib. 1. eodem modo inveniuntur M, N vertices alterius axis. *Q. E. I.*

Hisce manentibus, si duæ aliæ diametri conjugatæ CX, CV essent axes: occurrant hæ contingenti FD, in X, V punctis; erit rectangulum XFV æquale quadrato ex CG (51. lib. 1.) hoc est, rectangulo CFK: ergo circulus descriptus per puncta C, K & X transibit etiam per V, & propter angulum XCV (per Hypothesin) rectum, erit centrum hujusce circuli in recta FXV, & propter rectam PQ perpendiculariter bisecantem ipsam CK, erit centrum in ipsa PQ. ergo est in puncto Q. hoc est, in centro circuli per puncta C, K, D, transeuntis; ergo duo circuli se invicem secantes in punctis C, K, idem habent centrum, quod est absurdum: ergo duo tantum sunt axes in utraque sectione. *Q. E. D.*

Si in Hyperbola diametri FL, GH, essent æquales; punctum K coincideret cum puncto C, & circulus centro Q descriptus contingeret ipsam FL in C, & demonstratio in hoc casu eadem est, ac in præcedente, legendo quadratum ex FC pro rectangulo CFK.

Si datæ diametri conjugatæ sint sibi invicem perpendiculares, ipsæ erunt axes, ut patet.

Cor.

Cor. I. Hinc, datâ positione Ellipsi, aut Hyperbolâ, inveniri possunt axes ejus, nam centrum invenitur per Cor. 7. 25. lib. 1. & diametri duæ conjugatæ per 27. lib. 1. & in Hyperbola magnitudo diametri secundæ determinatur per definitionem 24. lib. 1. Vel, sectione positione datâ inventoque ejus centro, axes facilius inveniri possunt; si enim describatur circulus, cujus centrum idem sit cum centro sectionis, occurrens sectioni in duobus punctis, et jungantur puncta occursus, diameter sectionis hanc jungentem bifariam secans erit axis, ut patet.

Cor. II. Manifestum est ex Cor. 8. 25. lib. 1. quod recta per verticem axis sectionis conicæ ducta, & ipsi perpendicularis, sectionem contingit; & contra, sectionem contingens in vertice axis est axi perpendicularis.

PROP. VIII.

Axes Ellipseos sunt inæquales; & eorum major est maxima, & eorum minor minima, omnium diametrorum Ellipseos; & axes Hyperbolæ sunt minimæ omnium ejus diametrorum.

Pars 1. SIT Ellipsis cujus axes sint AB, MN, erunt inæquales per Cor. 2. 31. lib. 1. Sit eorum major AB, qui axis transversus dicitur, & minor MN qui axis conjugatus sive secundus dicitur; quævis semidiameter CF erit minor ipsâ CB, major vero ipsâ CM; ducatur enim FE ordinata ad ipsam AB, & propter angulum CEF rectum, quadratum ex CF est æquale quadratis ex CE, FE simul: sed quadratum ex FE minus est rectangulo AEB, nam est ad istud rectangulum, ut quadratum ex CM ad quadratum ex CB (Cor 1. 31. lib. 1.) ergo quadratum ex CF est minus quadrato ex CE & rectangulo AEB simul, hoc est, quadrato ex CB (5. 2.) ergo erit ipsa CF minor ipsâ CB, & ductâ ordinatâ FL ad Fig. 7.

axem MN, eodem modo oſtendetur ſemidiametrum CF, majorem eſſe ipſâ CM.

FIG. 6. *Pars.* 2. A vertice diametri CF Hyperbolæ, ducatur ad axem tranſverſum AB recta FE ei ordinatim applicata; & propter angulum FEC rectum, erit ſemiaxis CB minor ipſâ CF; & ſimiliter erit ſemiaxis ſecundus CM, minor quâvis aliâ ſemidiametro ſecundâ, nam CM eſt axis tranſverſus Hyperbolæ ipſi FB conjugatæ.

COR. I. Manifeſtum eſt, quod quo remotior quævis diameter Hyperbolæ ſit ab axe, eò major erit.

FIG. 7. COR. II. Diameter CF Ellipſeos axi majori propior, major eſt diametro CP remotiore. Si enim CF, CP æquales eſſent, diameter bifariam ſecans jungentem FP, ipſam ad angulos rectos ſecaret, & proinde eſſet axis, contra præcedentem; & ſi CF minor eſſet ipſâ CP, circulus centro C, & intervallo CF deſcriptus ſecaret ipſam CP intra Ellipſim, ſed occurret axi minori extra Ellipſim, ergo occurret Ellipſi alicubi inter F, & M, puta in Q tum eſſent CF, CQ æquales & diameter biſecans jungentem FQ eſſet axis, ut prius (contra præc.) unde conſtat corollarium.

COR. III. Hinc manifeſtum eſt, quod duæ diametri Ellipſeos aut Hyperbolæ, quæ ab eodem axe æqualiter diſtant, ſunt æquales, & contra.

FIG. 8. COR. IV. Axes Hyperbolæ AB, MN, bifariam ſecant angulos, qui aſymptotis CY, CZ comprehenduntur. Ducatur enim per verticem axis AB, recta alteri axi parallela, hæc continget Hyperbolam; occurrat vero aſymptotis in punctis R, S, erunt RB, BS, æquales (36. lib. 1.) & cum anguli ad B ſunt recti, triangula RBC, SBC erunt æquiangula, & ergo anguli ad C ſunt æquales.

DEFI-

DEFINITIONES III, IV, V.

III. SI in axe Parabolæ ſumatur intra ſectionem punctum, cujus diſtantia a vertice axis ſit quarta pars ipſius parametri; punctum iſtud dicitur *Focus* Parabolæ.

IV. Si in AB axe tranſverſo Ellipſeos aut Hyperbolæ ſumantur duo puncta F, & O, intra Ellipſim, vel oppoſitas Hyperbolas, ita ut rectangulum AFB vel AOB ſit æquale quadrato quod fit ex ſemiaxe conjugato CM; hæc puncta F, & O dicuntur *Foci* Ellipſeos aut Hyperbolarum oppoſitarum. Fig. 9, 10.

V. Per focum ſectionis conicæ ducatur recta axi ordinatim applicata, & per punctum in quo occurrit ſectioni ducatur contingens, hæc dicitur *contingens Focalis*.

Cor. I. Si centro M vertice axis conjugati Ellipſeos, & intervallo CA ſemiaxe tranſverſo, deſcribatur Circulus, ſecabit axem tranſverſum in focis. Nam occurrat ei in punctis F, O, & quadratum ex MF ſive CA æquale erit quadratis ex CF & CM ſimul, ſed quadratum ex CA eſt etiam æquale quadrato ex CF & rectangulo AFB ſimul (per 5. 2.) ergo rectangulum AFB eſt æquale quadrato ex CM, & proinde eſt F focus; & ſimiliter erit O alter focus. Fig. 9.

Cor. II. Si a centro Hyperbolæ C, ſumatur in axe tranſverſo ſegmentum CF, vel CO æquale rectæ AM jungenti vertices axium, erit terminus ejus focus. Nam quadratum ex AM ſive CF eſt æquale quadratis ex CA & CM ſimul, & (per 6. 2.) idem quadratum ex CF eſt æquale quadrato ex CA & rectangulo AFB, ergo rectangulum AFB eſt æquale quadrato ex CM, & proinde eſt F focus; et ſimiliter erit O alter focus. Fig. 10.

Cor. III. Patet quod foci Ellipſeos, aut Hyperbolarum oppoſitarum vel conjugatarum, æqualiter a centro diſtant.

PROP.

PROP. IX.

Fig. 9, 10, 11. Per focum F sectionis conicæ RAP ducatur FT ordinatim applicata axi AB, & ducatur contingens focalis TD; si per verticem axis AB ducatur contingens, ejus segmentum inter contactum & contingentem focalem interjectum, erit æquale segmento axis AF inter eundem contactum & focum F.

Fig. 11. PRIMO sit sectio Parabola, & occurrat contingens focalis axi in D, & contingenti AH, per verticem axis ductæ, in H, erunt AH, AF æquales. Nam (per Prop. 47. lib. 1.) est AD dimidium ipsius FD, ergo erit AH dimidium ipsius FT; sed FT est dimidium parametri axis (per Def. 3. & Cor. 2. 1. huj.) est igitur AH quarta pars ejusdem parametri & proinde æqualis ipsi AF.

Fig. 9, 10. Secundo sit sectio Ellipsis aut Hyperbola, & occurrat contingens focalis axi AB in D, & contingentibus ductis per vertices axis AB in H & G; erunt AH, BG æquales ipsis AF, BF; erit enim rectangulum AH in BG, æquale quadrato ex semiaxe secundo CM per 50. lib. 1. hoc est rectangulo AFB (per Def. 4.) & per Cor. 5. 18. lib. 1. est AH ad BG, ut (HT, ad TG, sive propter parallelas ut) AF ad FB: ergo hæc æqualia rectangula AH in BG, & AF in FB sunt etiam similia, & proinde latera homologa AH, AF & BG, BF æquantur. *Q. E. D.*

Cor. Manentibus jam positis, si a quovis puncto P sectionis conicæ vel sectionis oppositæ, ducatur recta ad focum F, & recta PQ ad axem AB ipsi perpendicularis, occurrens contingenti focali in L, & sectioni iterum in R; quadratum ex FQ erit æquale rectangulo PLR. Nam quoniam contingens AH sit parallela secanti LPR, erit quadratum ex AH ad rectangulum PLR,

PLR, ut (quadratum ex HT, ad quadratum ex TL (Cor. 6. 18. lib. 1.) ſive propter parallelas ut) quadratum ex AF ad quadratum ex FQ; ſed quadratum ex AH eſt æquale quadrato ex AF per hanc Propoſitionem: ergo rectangulum PLR eſt æquale quadrato ex FQ.

PROP. X.

Per focum F ſectionis conicæ RAP, ducatur FT ordinatim applicata axi AB, & ducatur contingens focalis TD, & a quovis puncto P, in hac ſectione vel ſectione oppoſita, ducatur recta ad focum F, & perpendicularis PQ ad axem AB, occurrens TD contingenti focali in L; erunt PF, LQ æquales. Fig. 9, 10, 11.

OCCURRAT recta PQ ſectioni iterum in R; quoniam angulus FQP eſt rectus, quadratum ex FP æquale eſt quadratis ex PQ, FQ, hoc eſt, (Cor. præc.) quadrato ex PQ una cum rectangulo PLR, hoc eſt, quadrato ex LQ (per 6. 2.) ergo recta FP æqualis eſt ipſi LQ. *Q. E. D.*

DEFINITIO VI.

OCCURRAT contingens focalis TH axi Parabolæ, vel axi tranſverſo Ellipſeos aut Hyperbolæ AB in puncto D, & per punctum D ducatur recta ipſi AB perpendicularis: hæc recta *Directrix* ſectionis conicæ dicitur. Fig. 9, 10, 11.

Cor. I. Omnis recta directrici Parabolæ perpendicularis, eſt diameter, & contra, ut patet ex Cor. 4. ad Def. Sectionum lib. 1.

Cor. II. Diſtantia directricis a vertice Parabolæ æqualis eſt diſtantiæ foci ab eodem vertice per Prop. 47. lib. 1.

Cor.

Cor. III. In Ellipsi & Hyperbola semiaxis CA est media proportionalis inter CD, distantiam directricis a centro, et CF distantiam foci a centro, ut patet ex 48 & 49. lib. 1. patet etiam duas esse directrices in Ellipsi & Hyperbola, a centro æqualiter distantes.

PROP. XI.

Fig. 9, 10, 11. Si a quovis puncto P in sectione conica RAP ducatur recta PE perpendicularis ad directricem DE, & recta PF ad focum huic directrici propiorem; recta PF ducta ad focum erit ad perpendicularem PE, ut FA distantia foci F a vertice propiore axis, ad DA distantiam directricis DE ab eodem vertice.

DUCANTUR enim per punctum P recta PQ ad axem AB ipsi perpendicularis, & occurrens contingenti focali DT in L, erit QD segmentum axis inter rectam PQ & directricem æquale ipsi PE, et erit LQ æqualis ipsi PF (per Prop. præced.) ducatur a vertice axis A contingens occurrens ipsi DT in H; quoniam igitur parallelæ sunt AH, LQ, erit LQ ad QD, ut HA ad AD, hoc est, ut FA ad AD (9. huj.) ergo est PF ad PE ut FA ad AD. *Q. E. D.*

Cor. I. Hinc, in Ellipsi et Hyperbola, recta PF ducta ad focum est ad PE perpendicularem ad directricem, ut CF distantia foci a centro ad CA semiaxem transversum. Nam per Cor. præc. CF est ad CA, ut CA ad CD, ergo convertendo est CF ad FA, ut CA ad AD, tum alternando est CF ad CA, ut FA ad AD, hoc est, ut PF ad PE, per Propositionem; ergo PF est ad PE, ut CF ad CA.

Cor. II. Ex demonstratione præcedente est CF distantia foci a centro ad CA semiaxem, ut FA distantia foci a vertice propiore ad DA distantiam directricis ab eodem vertice.

Cor.

Cor. III. Rectæ a punctis in eadem ſectione vel oppoſitis ſectionibus ductæ ad focum, ſunt inter ſe ut perpendiculares ductæ ab iiſdem punctis ad directricem iſti foco propiorem.

SCHOLIUM.

SIT DAH triangulum rectangulum & in baſi ejus DA ultra angulum rectum A producta, ſumatur recta FA æqualis perpendiculo HA, & circa punctum F revolvatur recta FA, & augeatur eâ lege, ut ſit ſemper æqualis rectæ per terminum ejus ductæ parallelæ ipſi HA, & terminatæ ipſis DA, DH productis; linea deſcripta motu termini hujuſce rectæ revolventis, erit ſectio conica: ſciz. Hyperbola, Parabola, vel Ellipſis prout baſis trianguli DA ſit minor, æqualis, vel major perpendiculo HA; deinde puncto D interſectione baſis cum Hypothenuſa in infinitum abeunte Hypothenuſa ſit baſi parallela, & Ellipſis mutatur in Circulum cujus centrum eſt F; in cæteris caſibus punctum F erit focus ſectionis deſcriptæ, & punctum A vertex axis ejus; & cum recta revolvens ſit parallela ipſi HA, terminus ejus eſt in recta DH, quæ proinde ſectionem continget. Quæ omnia conſtant ex ſupra demonſtratis: unde etiam inveniri poſſunt punctum B alter terminus axis tranſverſi & centrum C, cum ſectio ſit Ellipſis aut Hyperbola. Fig. 9, 10, 11.

PROP. XII.

Recta a quovis puncto Parabolæ P ducta ad focum ejus F, eſt æqualis PE perpendiculari ductæ ab eodem puncto ad directricem. Fig. 11.

NAM, per præcedentem, eſt PF ad PE, ut FA ad AD, hoc eſt, in ratione æqualitatis per Cor. 2. ad Definitionem 6. hujus. *Q. E. D.*

Cor. I. Diſtantia puncti intra Parabolam a foco, eſt minor, & puncti extra Parabolam, eſt major perpendiculari ab eodem puncto ductâ ad directricem. Sit punctum M intra Parabolam, et ducatur MF ad focum et perpendicularis ad directricem ei occurrens

in E, et Parabolæ in P, jungatur PF, et quoniam MF minor est ipsis MP, PF, erit minor ipsis MP, PE, hoc est, ipsâ ME. Sit nunc punctum N extra Parabolam in recta PE perpendiculari ad directricem, et junctâ NF, erunt NF, NP simul majores ipsâ PF sive PE; ergo NF major est ipsâ NE.

Cor. II. Hinc si distantia alicujus puncti a foco Parabolæ sit æqualis, vel minor, vel major perpendiculari ab eodem puncto ad directricem ductâ, erit illud punctum in Parabola in primo casu, intra ipsam in secundo, et extra ipsam in tertio casu.

PROP. XIII.

Fig. 10. Si a puncto P in Hyperbola RAP ducatur ad focum ejus F recta PF, & recta PN ad directricem DE, foco F propiorem, asymptoto CY parallela; erunt hæ ductæ PF, PN inter se æquales.

DUCATUR enim a puncto P recta PE ad directricem DE ei perpendicularis, et sit alter focus O, per B verticem axis transversi ducatur contingens occurrens asymptoto CY in Y, erit BY æqualis semiaxi secundo CM, (38. lib. 1.) et erit CY æqualis ipsi CO distantiæ foci a centro (per Cor. 2. ad Def. 4) et per Cor. 1. 11. hujus, est PF ad PE, ut (CO sive) CY ad CB; sed propter æquiangula, triangula PEN, CBY, est PN ad PE, ut CY ad CB; ergo ipsæ PF, PN sunt æquales. *Q. E. D.*

Cor. Ostendi potest eodem prorsus modo ac in præcedente Corollario, quod distantia puncti intra Hyperbolam a foco sit minor, et puncti extra Hyperbolam major, quam recta asymptoto parallela ab eodem puncto ducta ad directricem huic foco propiorem; et proinde si distantia alicujus puncti a foco Hyperbolæ, sit æqualis rectæ ab eodem puncto ductæ ad directricem huic foco propiorem et asymptoto parallelæ, erit istud punctum in Hyperbola ad cujus focum recta ducta fuit.

PROP.

PROP. XIV.

Si a puncto Ellipſeos aut Hyperbolæ ducantur ad focos duæ rectæ; erit ipſarum ſumma in Ellipſi, & differentia in Hyperbola, æqualis axi tranſverſo.

SIT Ellipſis aut Hyperbola cujus axis tranſverſus eſt AB, & foci F, O, & directrices DE & ZX; per punctum in ipſa P ducantur PF, PO ad focos, & recta ipſi AB parallela occurrens directricibus DE, ZX in punctis E & X. Fig. 9, 10.

Per Cor. 1. Prop. 11. hujus eſt PF ad PE, ut CF ad CA, hoc eſt, ut CA ad CD (Cor. 3, Def. 6.) ſive, ut AB ad DZ; & ſimiliter eſt PO ad PX, ut AB ad DZ; ergo ſumma vel differentia antecedentium PF, PO eſt ad ſumman vel differentiam conſequentium PE, PX, ut AB ad DZ; ſed in Ellipſi ſumma & in Hyperbola differentia conſequentium PE, PX eſt æqualis ipſi DZ; ergo in Ellipſi ſumma & in Hyperbola differentia antecedentium ſciz. rectarum PF, PO æqualis eſt ipſi AB axi tranſverſo. *Q. E. D.*

Cor. I. Si a puncto extra Ellipſim ducantur duæ rectæ ad focos, erunt hæ ſimul majores axe tranſverſo: ſi vero ducantur a puncto intra Ellipſim erunt ſimul minores eodem axe, ut patet per 20, 1.

Cor. II. Et contra: ſi rectæ a puncto ad focos ductæ ſint ſimul æquales, majores, vel minores axe tranſverſo; erit punctum illud in Ellipſi in primo caſu, extra ipſam in ſecundo, & intra ipſam in tertio caſu.

Cor. III. Si a puncto M intra Hyperbolam LAP ducantur ad focos rectæ MF, MO; erit ipſarum exceſſus major axe tranſverſo AB: ſi vero ducantur a puncto N extra Hyperbolam, erit ipſarum exceſſus minor eodem axe. Nam ſit M intra Hyperbolam, cujus focus ſit F, & occurrat huic Hyperbolæ in L recta MO ad Fig. 12.

focum O ducta, & jungatur LF, erit excessus rectæ MO supra MF major excessu ejus supra LM, LF simul, hoc est, excessu rectæ LO supra LF, hoc est, axe transverso per hanc propositionem.

Sit nunc punctum N extra Hyperbolam, & a puncto L in quo recta NF Hyperbolæ occurrit, ducatur recta ad focum O, erit NO minor ipsis NL, LO; excessus igitur ipsius NO supra NF minor est excessu ipsarum NL, LO supra eandem NF, hoc est, excessu rectæ LO supra LF, hoc est, axe transverso AB.

Cor. IV. Et contra si excessus rectarum, quæ a puncto aliquo ad focos Hyperbolarum ducuntur, fuerit æqualis, vel major, vel minor axe transverso, erit punctum hoc in alterutra Hyperbola, vel intra, vel extra Hyperbolam.

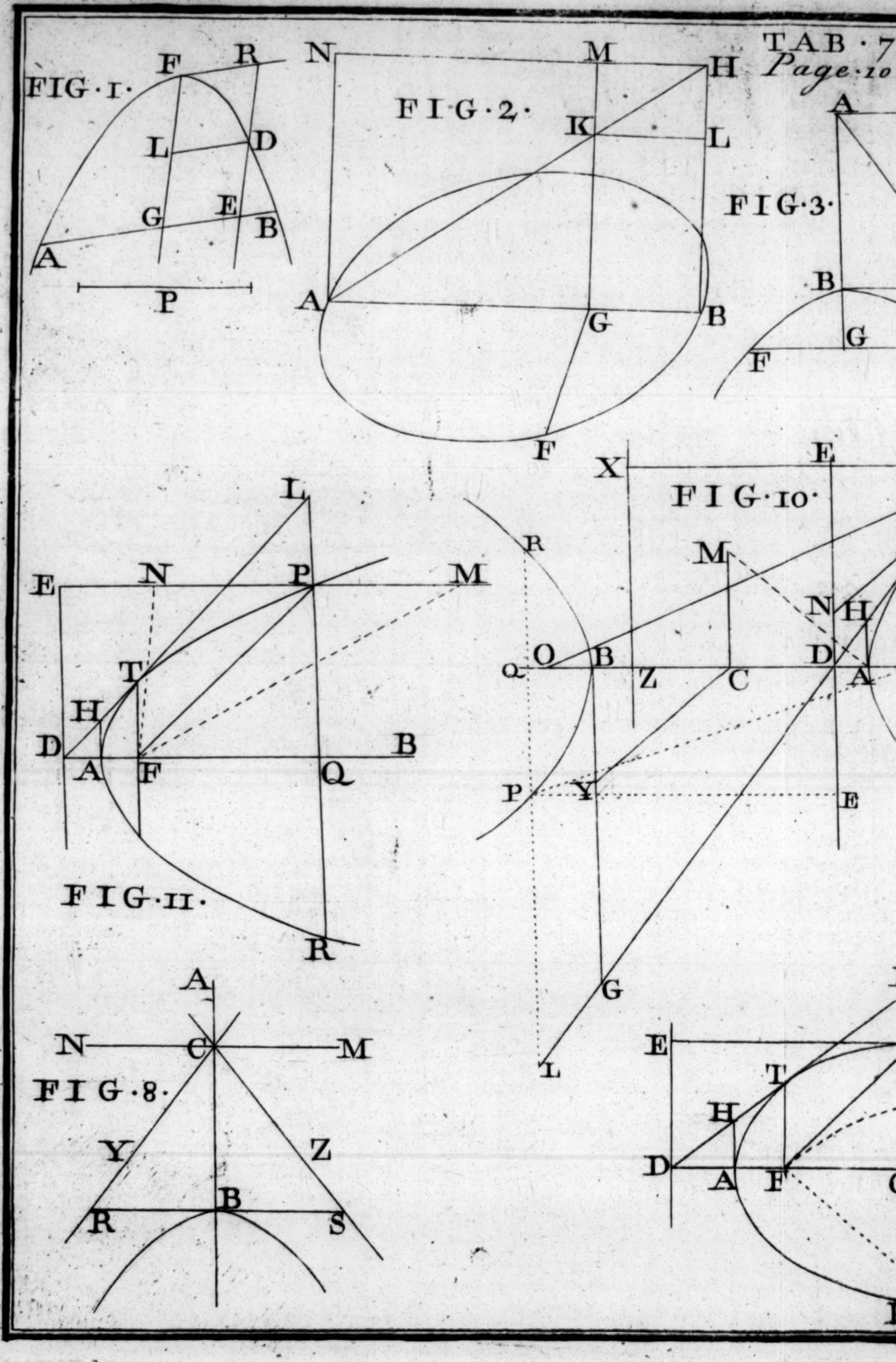
SCHOLIUM.

Cum harum linearum quæ sectionum directrices vocantur originem ex natura ipsius coni deducere conatus sim, in theorema quoddam incidi, quod haud inconcinnum videbatur, & fini proposito aliquatenus inservire potest; id vero sub finem hujusce libri inserui, ne seriem propositionum interrumpat.

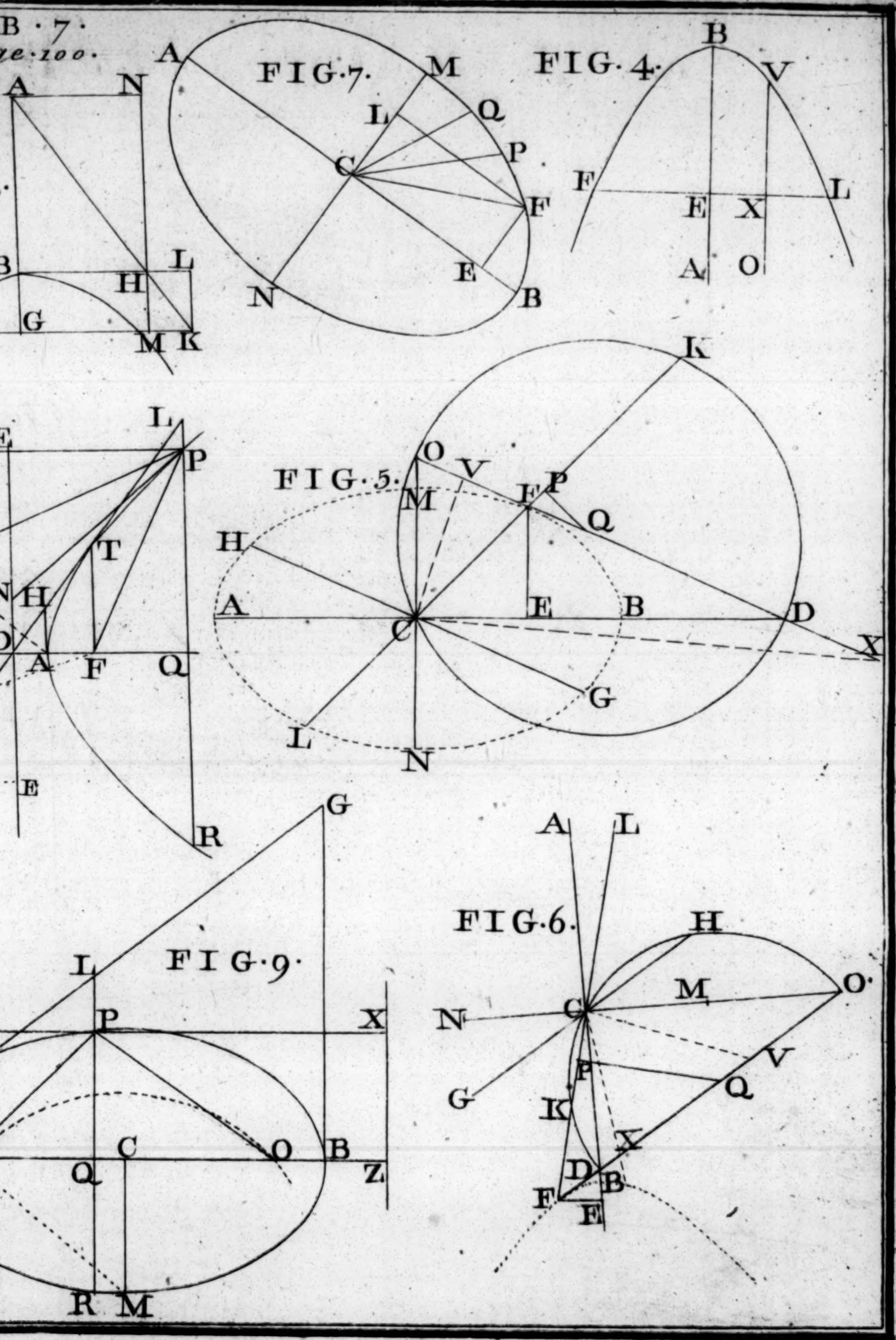
PROP. XV.

Fig. 13. Si a puncto Parabolæ P ducatur ad focum recta PF, & perpendicularis PE ad directricem; recta PT bifariam secans angulum FPE, his ductis comprehensum, Parabolam continget: et contra recta PT Parabolam contingens in P, bifariam secabit angulum rectis PF, PE comprehensum.

Pars 1. Sumatur enim in recta PT quodvis punctum X, & ducantur rectæ XF, XE & EF, & ducatur XD perpendicularis ad directricem: quoniam igitur in triangulis PTF, PTE


TAB·7
Page·10
FIG·1·
FIG·2·
FIG·3·
FIG·10·
FIG·11·
FIG·8·

B · 7 ·
ge · 100 ·



PTE æquales ſunt PF, PE (12. huj.) communis autem PT, & æquales anguli TPF, TPE; æquales erunt TF, TE, & anguli ad T recti, ideoque XF æqualis eſt ipſi XE, & proinde major ipſâ XD (19, 1.) ergo punctum X eſt extra Parabolam per Cor. 2, 12. hujus; & ergo recta PT contingit Parabolam in P.

Pars 2. Si nunc recta PT Parabolam contingat in P, bifariam ſecabit angulum FPE. Nam ſi non, ducatur alia recta hunc angulum bifariam ſecans, hæc quoque Parabolam continget in P, per caſum primum, quod fieri nequit (per 16. lib. 1.) ergo contingens PT bifariam ſecat angulum FPE. *Q. E. D.*

PROP. XVI.

Si a puncto Ellipſeos P ducantur ad focos duæ rectæ PF, PO; recta PT bifariam ſecans angulum FPE, qui deinceps eſt angulo FPO comprehenſo ductis ad focos, Ellipſim in puncto P continget: & contra ſi recta PT Ellipſim contingat in P, bifariam ſecabit angulum FPE, qui deinceps eſt angulo FPO comprehenſo rectis a puncto P ad focos ductis. FIG. 14.

Pars 1. PRODUCATUR OP ad E, ita ut PE, PF ſint æquales, & ſumatur in recta PT quodvis punctum X, & ducantur XO, XF, XE, & FE quæ occurrat ipſi PT in T, quoniam igitur in triangulis PTF, PTE æquales ſunt PF, PE, communis autem PT & anguli TPF, TPE æquales, erunt TF, TE æquales, & anguli ad T recti, quare æquales erunt XF, XE; ſed XO, XE ſunt ſimul majores ipſâ OE; ergo XO, XF erunt ſimul majores ipſâ OE, hoc eſt, ipſis OP, PF, hoc eſt, axe tranſverſo Ellipſeos (14. huj.) ergo punctum X eſt extra Ellipſim (per Cor. 2, 14. huj.) & proinde recta PT Ellipſim in puncto P contingit. *Q. E. D.*

Pars 2. Demonſtratur iiſdem verbis ac pars ſecunda præcedentis.

PROP.

PROP. XVII.

Fig. 12. Si a puncto Hyperbolæ P ducantur ad focos duæ rectæ PF, PO; recta PT bifariam ſecans angulum FPO his ductis comprehenſum, Hyperbolam in puncto P continget: & contra, ſi recta PT Hyperbolam in P contingat, bifariam ſecabit angulum EPO comprehenſum rectis a puncto P ad focos ductis.

Pars 1. SUMATUR enim in recta majore PO, recta PE æqualis ipſi PF, erit EO æqualis axi tranſverſo (14. huj.) jungatur FE quæ occurrat ipſi PT in T, & ſumatur in recta PT punctum quodvis X, & ducantur XO, XF, XE, &, ut in præcedente, erunt XE, XF æquales; & quoniam XO ſit minor ipſis XE, EO, ejus exceſſus ſupra XF erit minor exceſſu ipſarum XE, EO ſupra XF, hoc eſt, minor ipſa EO, quæ æqualis eſt axi tranſverſo; & proinde punctum X eſt extra Hyperbolam (Cor. 4, 14. huj.) ergo recta PT Hyperbolam in puncto P contingit.

Pars 2. Demonſtratur iiſdem verbis, ac pars ſecunda propoſitionis 15. *Q. E. D.*

SCHOLIUM.

FOCI Ellipſeos & Hyperbolæ dicuntur a Veteribus puncta ex comparatione facta, de foco autem Parabolæ tacuit Apollonius; a Recentioribus hæc puncta Umbilici & Foci dicuntur, fortaſſe ex eo quod radii lucis, in ſpecula concava revolutione ſectionum conicarum generata incidentes, in his punctis colligi poſſunt. Nam ſi radii lucis incidant in ſpeculum Parabolicum, & ſint axi ejus parallelæ, poſt reflectionem coibunt omnes in foco; & ſi incidant in ſpeculum Ellipticum a uno foco devergentes, in altero poſt reflectionem coibunt; & ſi incidant in ſpeculum Hyperbolicum convergentes

gentes ad focum Hyperbolæ, quæ opposita est Hyperbolæ generanti, in foco speculi post reflectionem coibunt.

Hæc omnia patent ex tribus propositionibus præcedentibus, et ex eo quod angulus reflectionis est æqualis angulo incidentiæ.

PROP. XVIII

Per terminos axis transversi Ellipseos aut Hyperbolæ AB, ducantur duæ contingentes, quæ occurrant cuivis alii contingenti PT in punctis H et G; circulus circa diametrum GH descriptus transibit per focos sectionis F & O. Fig. 15, 16.

SIT enim CM semiaxis conjugatus, et quoniam parallelæ sunt contingentes AH, BG et occurrunt tertiæ contingenti in H et G, erit rectangulum AH in BG æquale quadrato ex CM (per 50. lib. 1.) hoc est, rectangulo AFB (per Def. 4. hujus) ergo est AH ad AF, ut FB ad BG, et hæ rectæ sunt circa æquales angulos FAH, FBG, æquiangula sunt igitur triangula FAH, FBG (6. 6) igitur æquales sunt anguli FHA, BFG; anguli vero FHA, HFA conficiunt rectum (quia rectus est angulus FAH) ergo anguli BFG, HFA conficiunt rectum; ideoque rectus est angulus GFH, et proinde est punctum F ad peripheriam circuli circa GH descripti (Convers. 31. 3.) similiter ostendetur alterum focum O esse ad peripheriam ejusdem circuli. *Q. E. D.*

PROP. XIX.

Si a puncto Ellipseos aut Hyperbolæ P ducantur ad focos duæ rectæ PF, PO; continebunt rectangulum æquale quadrato ex semidiametro CD quæ parallela est contingenti per punctum P ductæ. Fig. 15, 16.

DUCATUR enim per terminos axis transversi contingentes AH, BG, quæ occurrant contingenti per P ductæ in H, G; per præcedentem circulus circa diametrum GH descriptus transibit per

per focos; ab utrovis foco ut F ducatur ad GH perpendicularis FT, occurratque ipsi OP in E; et quoniam æquales sunt anguli FPT, EPT, (par. 2. Prop. 16, 17. huj.) et communis PT, erit FT æqualis ipsi TE et PF ipsi PE; igitur circuli diameter GH bifariam et perpendiculariter secat ipsam FE, et est punctum F in ipsius circumferentia, ergo est punctum E in eadem; et proinde propter circulum est rectangulum OPE, hoc est, OPF æquale rectangulo GPH, hoc est, quadrato ex semidiametro CD ipsi GH parallela (per par. 2. Prop. 50. lib. 1.) *Q. E. D.*

PROP. XX.

Fig. 15, 16. Si a focis Ellipseos aut Hyperbolæ F & O dimittantur ad quamvis contingentem GPH perpendiculares FT, OL; circulus circa axem transversum descriptus transibit per puncta T et L in quibus sciz. perpendiculares contingenti occurrunt.

SIT enim AB axis transversus et centrum C, et a contactu P ducantur PF, PO ad focos, occurratque perpendicularis FT ipsi PO in E, et jungatur CT. Quoniam æquales sunt anguli FPT, EPT (16, et 17. huj.) et communis PT, erit FP æqualis ipsi PE, ergo OE est æqualis axi transverso (14. huj.) sed æquales sunt quoque FT, TE & etiam FC, CO (Cor. 3. Def. 5. huj.) ergo parallelæ sunt OE, CT, et proinde quoniam CF est dimidium ipsius OF, erit CT dimidium ipsius OE, hoc est, dimidium axis transversi AB: ergo punctum T est in circumferenti circuli circa AB descripti; et similiter erit punctum L in eadem. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XXI.

Si a focis Ellipſeos aut Hyperbolæ F & O dimittantur ad quamvis contingentem GPH perpendiculares FT, OL; continebunt rectangulum æquale quadrato quod ex fit ſemiaxe ſecundo. Fig. 15, 16.

SIT enim AB axis tranſverſus, & centrum C, & jungatur CT quæ occurrat ipſi OL in N, propter parallelas ON, FT erunt triangula CFT, CON æquiangula, & proinde propter æquales CF, CO, erunt etiam CT, CN & ON, FT æquales; circulus autem deſcriptus circa axem AB tranſibit per puncta T & L (per præc.) & propter æquales CT, CN, tranſibit quoque per N; & ergo, propter circulum, erit rectangulum LO in (ON ſive) TF æquale rectangulo BOA, hoc eſt, quadrato quod fit ex ſemiaxe ſecundo, per Def. 4. hujus. *Q. E. D.*

PROP. XXII.

Contingat Ellipſim aut Hyperbolam recta PT, & a contactu P ducatur PN ad axem tranſverſum contingenti perpendicularis, & a centro ducatur CK ad contingentem ei perpendicularis; hæ ductæ continebunt rectangulum æquale quadrato quod fit ex ſemiaxe ſecundo CM. Fig. 17, 18.

SINT Ellipſeos aut Hyperbolæ axes AB, M*m*, & centrum C. Ducantur a contactu P rectæ PE, PQ perpendiculares ad axes, erit QC ipſi PE æqualis; occurrat CM ipſi PT in R, & propter parallelas, erunt anguli NPE, RCK æquales, igitur triangula rectangula CKR, PEN ſimilia ſunt; ergo erit CK ad CR, ut PE ad PN, & proinde eſt rectangulum CK in PN æquale rectangulo CR

in (PE ſive) CQ. hoc eſt, quadrato ex ipſa CM (per 48, & 49. lib. 1.) *Q. E. D.*

PROP. XXIII.

FIG. 15, 16. Contingat recta PT Ellipſim aut Hyperbolam, & a contactu P ducatur ad focum recta PO, a centro vero ducatur CT ad contingentem ipſi PO parallela; erit CT æqualis dimidio axis tranſverſi AB.

DUCATUR enim PF ad alterum focum, & juncta FT productatur ut occurrat ipſi PO in E. Quoniam igitur parallelæ ſunt OE, CT, & æquales ſunt OC, CF, æquales erunt ET, TF, & quoniam contingens PT bifariam ſecat angulum FPE, erit FP ad PE, ut FT ad TE (per 3. 6.) æquales igitur ſunt FP, PE; ergo recta OE eſt ipſi AB æqualis per 14. hujus; quoniam vero CF eſt dimidium ipſius OF, erit CT dimidium ipſius OE ſive axis tranſverſi AB. *Q. E. D.*

PROP. XXIV.

FIG. 17, 18, 19. Contingat recta PT Ellipſim aut Hyperbolam, & a contactu P ducantur ad axem ſectionis duæ rectæ, una PE ei ordinatim applicata, & altera PN contingenti perpendicularis; erit CE ſegmentum axis inter centrum & ordinatam, ad NE ſegmentum ejuſdem inter ordinatam & rectam quæ contingenti eſt perpendicularis, ut axis ad ipſius parametrum.

OCCURRAT enim contingens PT axi ſectionis AB in D, & primum ſit AB alteruter axis Ellipſeos aut axis tranſverſus Hyperbolæ; eſt CE ad NE, ut rectangulum CED ad rectangulum

tangulum NED; eſt vero rectangulum CED æquale rectangulo BEA (Cor. 1. 49. lib. 1.) & propter angulum NPD rectum & PE ipſi AB perpendicularem, rectangulum NED æquale eſt quadrato ex PE; eſt igitur CE ad NE, ut rectangulum BEA ad quadratum ex PE, hoc eſt, ut axis AB ad ejus parametrum per Cor. 1. ad Def. 2. hujus.

Secundo, ſit AB axis ſecundus Hyperbolæ & (per Cor. 2. 49. lib. 1.) erit rectangulum CED æquale quadratis ex CE & CB, & ut prius, erit rectangulum NED æquale quadrato ex PE & erit CE ad NE, ut rectangulum CED ad rectangulum NED hoc eſt, ut quadrata ex CE & CB ad quadratum ex ordinata PE, hoc eſt, ut axis AB ad ipſius parametrum per Cor. 2. ad Def. 2. hujus. Fig. 19.

PROP. XXV.

Contingat recta PT Parabolam, occurratque ipſius axi AB in T, & a contactu P ducantur duæ rectæ ad axem, una PE ei ordinatim applicata, & altera PN contingenti perpendicularis; erit EN ſegmentum axis his ductis interceptum dimidium parametri axis: ſegmentum vero TN inter contingentem & perpendicularem PN, erit dimidium parametri diametri quæ per contactum P tranſit. Fig. 20.

DUCATUR enim per contactum P diameter DQ & per Propoſitionem 47. lib. 1. recta EA vel TA eſt dimidium ipſius TE.

Pars. 1. Quoniam igitur angulus NPT eſt rectus, & PE eſt ipſi TN perpendicularis, rectangulum TE in EN æquale eſt quadrato ex PE, hoc eſt, rectangulo contento AE in parametrum axis (1. huj.) ergo ut eſt TE ad AE, ita eſt parameter axis ad ip-

 ſam

ſam EN, quæ eſt igitur dimidium iſtius parametri. Hujuſmodi ſegmentum axis EN, dicitur *Subnormalis*.

Pars 2. Propter rectangula triangula TPN, TEP ſimilia, erit rectangulum TE in TN æquale quadrato ex TP, hoc eſt, rectangulo contento TA in parametrum diametri DQ, (Prop. 2. huj.) eſt ergo ut TE ad TA, ita parameter diametri DQ ad ipſam TN, quæ eſt igitur dimidium iſtius parametri. *Q. E. D.*

Cor. I. Hinc, ſi a vertice P cujuſvis diametri QD ducatur recta PF ad focum, erit quarta pars parametri iſtius diametri. Nam, ductâ contingente PT, quoniam diameter DQ eſt perpendicularis ad directricem Parabolæ, erit angulus FPT æqualis angulo DPT (15. huj.) hoc eſt, angulo alterno FTP, ergo æquales ſunt FP, FT; ſi igitur centro F deſcribatur circulus per puncta T, P tranſibit etiam per N propter angulum TPN rectum; eſt igitur recta PF dimidium ipſius TN, & ergo eſt quarta pars parametri diametri DQ per partem 2. Propoſitionis.

Vide *Newt.* Princ. Math. Lem. 13. lib. 1.

Cor. 2. Et hinc, ſegmentum diametri inter verticem ejus & directricem eſt quarta pars ipſius parametri, ut patet ex (Cor. præc. & 12. huj.) ſi vero punctum P eſſet vertex axis conſtat utrumque Corollarium ex Definitione foci.

Cor. III. Hinc, ſi recta jungens vertices duarum diametrorum ſit axi ordinatim applicata, ipſarum parametri erunt æquales. Nam ipſarum ſegmenta inter vertices & directricem ſunt æqualia, utpote latera oppoſita parallelogrammi.

PROP.

PROP. XXVI.

Recta ſectione conicâ terminata per focum ejus tranſiens & axi ordinatim applicata, æqualis eſt parametro ipſius axis. Quævis recta vero Parabolâ terminata per focum tranſiens æqualis eſt parametro diametri, cui ipſa recta ordinatim applicatur.

Pars 1. PRIMUM ſit ſectio Ellipſis, aut Hyperbola, cujus axis tranſverſus eſt AB & axis ſecundus M*m*, et centrum C et focus F, et per F tranſeat recta XY ordinatim applicata axi tranſverſo AB, erit XY æqualis parametro ipſius AB. Fig. 17, 18.

Nam (per Cor. 1. 31. & Def. 24. lib. 1.) eſt quadratum ex CA ad quadratum ex CM, ut rectangulum BFA, hoc eſt, quadratum ex CM (Def. 4.) ad quadratum ex FY: ergo proportionales ſunt ipſæ CA, CM, FY; ergo totæ AB, M*m*, XY ſunt proportionales et proinde eſt ipſa XY parameter axis tranſverſi AB per Definitionem parametri. Secundo ſi ſectio ſit Parabola, ordinata ad axem, per focum tranſiens, eſt æqualis ipſius axis parametro per Cor. 2. 1. hujus & Def. foci.

Pars 2. Sit XY recta Parabolâ terminata per focum F tranſiens & ordinatim applicata diametro DQ occurratque ei in O, per verticem P hujuſce diametri, ducatur PF ad focum, & PT Parabolam contingens erit hæc parallela ordinatæ OX; ergo angulus POF eſt æqualis angulo DPT, ſive angulo TPF (15. huj.) hoc eſt angulo alterno PFO; ergo abſciſſa PO æqualis eſt ipſi PF, hoc eſt, quartæ parti parametri diametri DQ per Cor. 1. præcedentis: eſt igitur recta XY æqualis parametro ipſius diametri DQ cui ordinatim applicatur, per Cor. 2. 1. hujus. Fig. 20.

Cor. Hinc, ſi a foco Hyperbolæ F ducatur ad ſectionem recta FL aſymptoto parallela, erit hæc quarta pars parametri axis tranſverſi. Fig. 18.

Ducatur

Ducatur a foco F recta FX axi ordinatim applicata, & Hyperbolæ occurrens in X, & ſit *dr* directrix Hyperbolæ, producatur FL ut occurrat directrici in *d* & ducatur X*r* ad directricem ipſi F*d* parallela; erit X*r* æqualis ipſi F*d* (34. 1.) & per Prop. 13. hujus, erunt FL, L*d* æquales, ut etiam FX, X*r*, ergo F*d* æqualis eſt ipſi FX, hoc eſt, dimidio parametri axis tranſverſi per partem 1. hujus; & ergo FL dimidium ipſius F*d* eſt quarta pars parametri axis tranſverſi Hyperbolæ.

PROP. XXVII.

Fig. 17, 18, 20. Si recta PT ſectionem conicam contingat, & a contactu P ducatur recta PF ad focum F, & PN contingenti perpendicularis occurrens axi AB, qui per focum tranſit, in N, a puncto vero N ducatur ad PF perpendicularis NV; abſcindet hæc ex PF ſegmentum VP æquale dimidio parametri axis AB.

Fig. 20. CUM ſectio ſit Parabola, ducatur ad axem perpendicularis PE; & quoniam oſtenſum eſt, in Cor. 1. 25. hujus, quod PF ſit ipſi NF æqualis, erit angulus FPN æqualis angulo FNP, quare æquiangula ſunt triangula rectangula PEN, NUP, & habent latus PN commune; æqualia ſunt igitur hæc triangula, ideoque eſt PV æqualis ipſi NE, hoc eſt, dimidio parametri axis (25. Prop. 1. hujus.)

Fig. 17, 18. Si vero ſectio ſit Ellipſis aut Hyperbola, ducatur a centro ad contingentem recta CK ipſi perpendicularis, & CT ipſi PF parallela, ſitque CM ſemiaxis ſecundus; & quoniam CK, CT parallelæ ſunt ipſis PN, PV, erunt anguli KCT, NPV æquales, ideoque æquiangula ſunt triangula rectangula CKT, NVP, quare rectangulum CT in PV eſt æquale rectangulo CK in NP, hoc eſt, quadrato ex CM (22. huj.) ergo proportionales ſunt CT, CM, PV:

PV: eſt vero CT æqualis ipſi CA (per 23. huj.) & proinde PV eſt dimidium parametri axis AB per Definitionem parametri. *Q. E. D.*

PROP. XXVIII.

Si per focum Ellipſeos aut Hyperbolæ O ducatur recta occurrens ſectioni vel oppoſitis Hyperbolis in punctis H, I; erit diameter UZ, quæ ductæ eſt parallela, media proportionalis inter HI, ſegmentum ductæ ſectione vel Hyperbolis interceptum, & axem tranſverſum AB. Fig. 17, 18. 21.

SIT centrum ſectionis C, & ducatur diameter bifariam ſecans ipſam HI in G, erit conjugata ipſi ZU (27. lib. 1.) per punctum H ducatur HS ad diametrum ZU ei ordinatim applicata erit hæc parallela ipſi CG (Cor. 27. lib. 1.) & ducatur contingens HT occurrens ipſi ZU in T; quoniam igitur CT ducta a centro ad contingentem eſt parallela ipſi HO jungenti contactum & focum, erit CT æqualis ipſi CA, eſt vero CS æqualis ipſi GH (34. 1.) ſed ſemidiameter CZ eſt media proportionalis inter ipſas CT, CS, (48. & 49. lib. 1.) hoc eſt, inter ipſas CA, GH, ergo tota diameter ZU eſt media proportionalis inter ipſas AB, HI. *Q. E. D.*

Cor. Hinc, rectæ Ellipſi aut Hyperbolâ utrinque terminatæ, & cum opus productæ per focum tranſeuntes, ſunt inter ſe ut quadrata ex diametris quibus ſunt parallelæ.

PROP.

PROP. XXIX.

Si rectæ lineæ ſectione conicâ, vel ſectionibus oppoſitis utrinque terminatæ tranſeant (cum opus productæ) per focum; rectangula contenta ipſarum ſegmentis ſciz. inter focum & ſectionem vel ſectiones, erunt inter ſe, ut ipſæ rectæ.

NAM ſi ſectio ſit Ellipſis aut Hyperbola, rectangula contenta ſegmentis rectarum ſunt inter ſe ut quadrata ex diametris quibus ipſæ rectæ ſunt parallelæ (31. & 40. lib. 1.) hoc eſt, ut ipſæ rectæ per Cor. præcedens.

Si ſectio ſit Parabola, rectangula contenta ſegmentis rectarum ſunt ut parametri diametrorum quibus rectæ ordinatim applicantur (Cor. 2. Prop. 3. huj.) hoc eſt, ut ipſæ rectæ per 26. hujus. *Q. E. D.*

PROP. XXX.

Si a foco Parabolæ ducatur ad quamvis contingentem recta ei perpendicularis; erit quadratum ex ducta æquale rectangulo contento diſtantiâ puncti contactus a foco, & diſtantiâ ejuſdem foci a vertice axis.

FIG. 13. SIT Parabola cujus axis eſt AB & focus F; per punctum in ipſa P ducatur contingens axi occurrens in N, recta PF ad focum, recta PB ordinata ad axem, & recta PE perpendicularis ad directricem; a foco ducatur ad contingentem recta FT ei perpendicularis & jungatur AT; quoniam angulus NPF æqualis eſt angulo NPE (per 15. huj.) hoc eſt, angulo alterno PNF, erunt rectæ FP, FN æquales; ergo perpendicularis FT bifariam ſecat ipſam PN in T; & ſegmentum BN bifariam ſecta eſt in vertice ejus

ejus A (per 47. lib. 1.) ergo recta TA parallela eſt ipſi PB & proinde axi perpendicularis, et igitur, propter angulum FTN rectum, quadratum ex FT eſt æquale rectangulo contento FA in FN ſive FP. *Q. E. D.*

Cor. Hinc quadrata ex perpendiculis, a foco Parabolæ in contingentes dimiſſis, ſunt inter ſe, ut diſtantiæ punctorum contactus a foco.

PROP. XXXI.

Si a foco Ellipſeos aut Hyperbolæ O, ducantur ad quamvis contingentem GPH, recta OL ei perpendicularis & recta OP ad contactum; erit OL ad OP, ut ſemiaxis ſecundus CM ad ſemidiametrum CD, quæ eſt ipſi contingenti parallela. Fig. 15, 16.

DUCANTUR enim ab altero foco F recta FT perpendicularis ad contingentem GP & recta FP ad contactum; quoniam (ex partibus ſecundis Prop. 16, & 17. huj.) anguli FPT, OPL ſunt æquales, triangula rectangula FTP, OLP ſunt ſimilia, ideoque rectangula OL in FT & OP in FP ſunt ſimilia: ergo quadratum ex OL eſt ad quadratum ex OP, ut rectangulum OL in FT ad rectangulum OP in FP, hoc eſt, ut quadratum ex CM ad quadratum ex CD, (per 21, & 19. huj.) ergo ipſa OL eſt ad OP, ut CM ad CD. *Q. E. D.*

Cor. I. Hinc, ſi a centro Ellipſeos aut Hyperbolæ C ducatur CK ad quamvis contingentem GH ei perpendicularis; erit CK ad ſemiaxem tranſverſum CA, ut ſemiaxis ſecundus CM ad ſemidiametrum CD quæ eſt ipſi contingenti parallela. Ducatur enim a foco recta OL perpendicularis ipſi GH, & OP ad punctum contactus, & a centro ducatur CT ad contingentem & ipſi OP

 parallela;

parallela; erit CT ipsi CA æqualis (23. huj.) tum propter æquiangula triangula KCT, LOP, erit CK ad CT sive CA, ut OL ad OP, hoc est, ut CM ad CD, per hanc propositionem.

Cor. II. Quoniam in Ellipsi aut Hyperbola, quadratum ex FT est ad quadratum ex FP, ut quadratum ex CM ad quadratum ex CD, & datum est quadratum ex semiaxe secundo CM; erit quadratum ex FT ut $\frac{FP\,q.}{CD\,q.}$ hoc est (per 19. huj.) ut $\frac{FP\,q.}{FP \times OP}$ sive ut $\frac{FP}{OP}$ ergo quadratum ex FT augetur in ratione in qua FP augetur et OP diminuitur, sed in Ellipsi dum FP augetur, OP diminuitur & vice versa: ergo in Ellipsi quadratum ex FT magis variatur quam in ratione ipsius FP; at in Hyperbola FP, OP simul augentur, vel diminuuntur: ergo in Hyperbola quadratum ex FT minus variatur, quam in ratione ipsius FP; & proinde ipsum perpendiculum FT a foco in contingentem dimissum, in Ellipsi magis, et in Hyperbola minus variatur quam in subduplicata ratione ipsius FP sciz. distantiæ foci F a puncto contactus P.

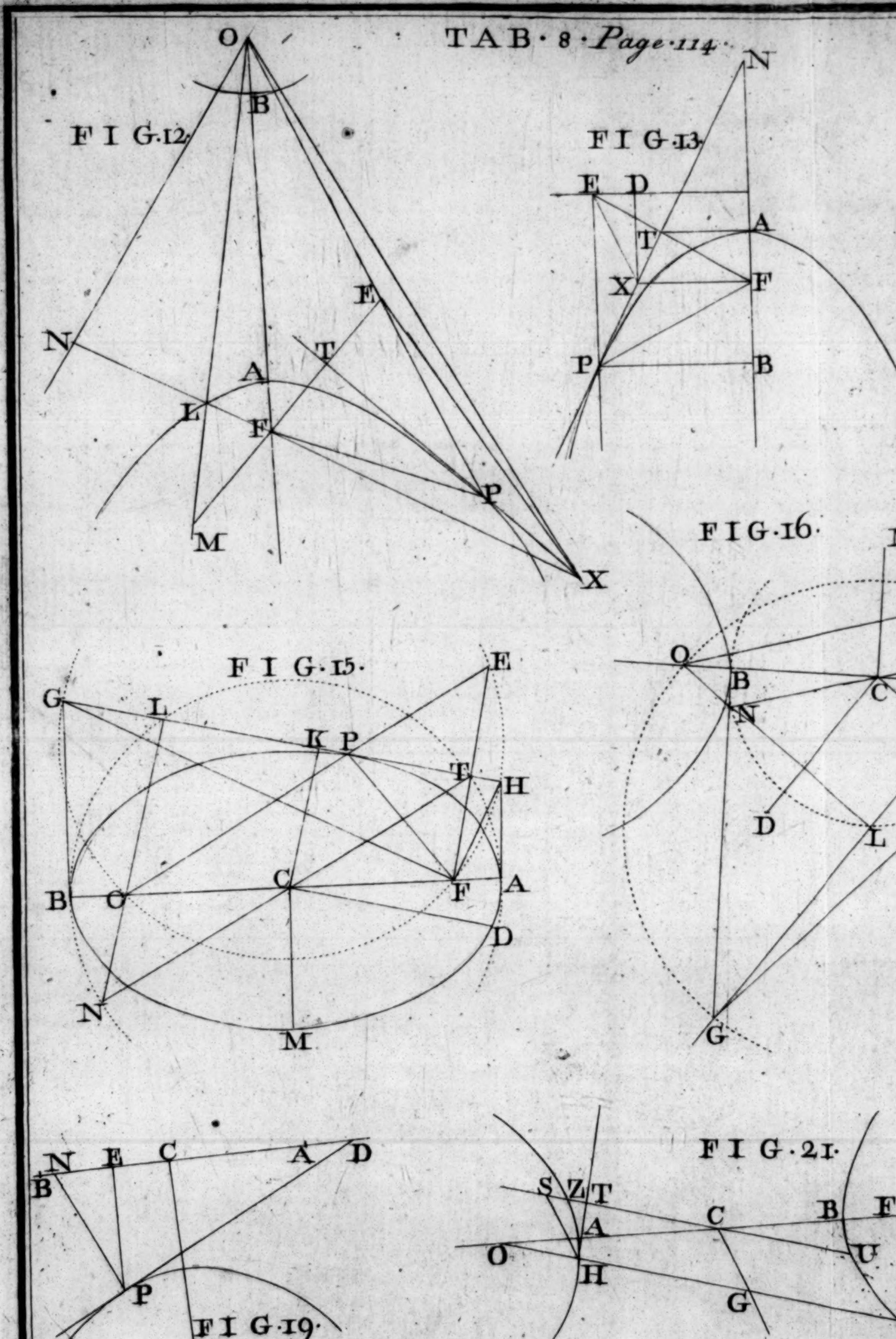
Vide *Newt.* Prin. Math. Cor. 6. Prop. 16. lib. 1.

PROP. XXXII.

Fig. 22. Sit Ellipsis cujus axis transversus est AB, & axis secundus MN, centrumque C; si a puncto D in axe secundo ponatur ad axem transversum recta DG, æqualis summæ vel differentiæ semiaxium CA, CM, & in recta DG (producta ultra punctum G, cum sit CG differentia semiaxium) sumatur GP æqualis ipsi CM; erit punctum P in Ellipsi.

DUCATUR enim per punctum P recta PE ordinatim applicata axi AB, & a centro ducatur recta parallela ipsi DP occurrens PE productæ in F; propter parallelas CD, PF, erit CF æqualis

TAB. 8. *Page* 114.



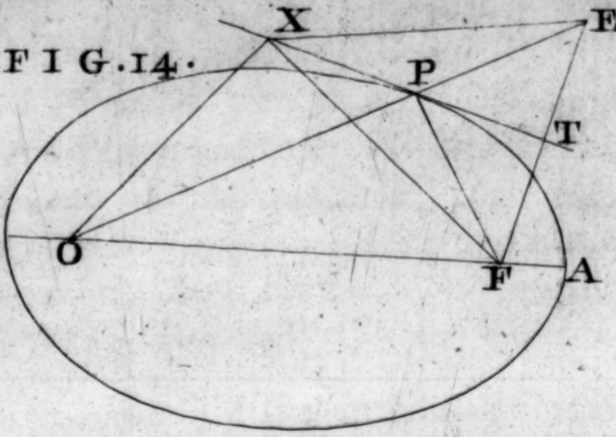


FIG.14.

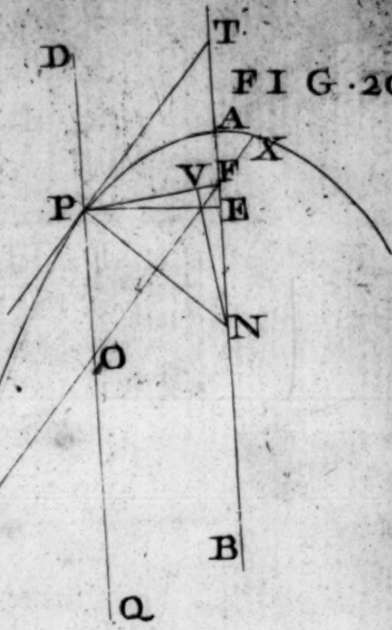
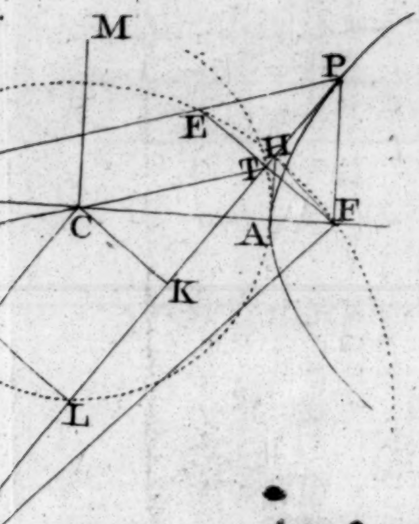


FIG.20.



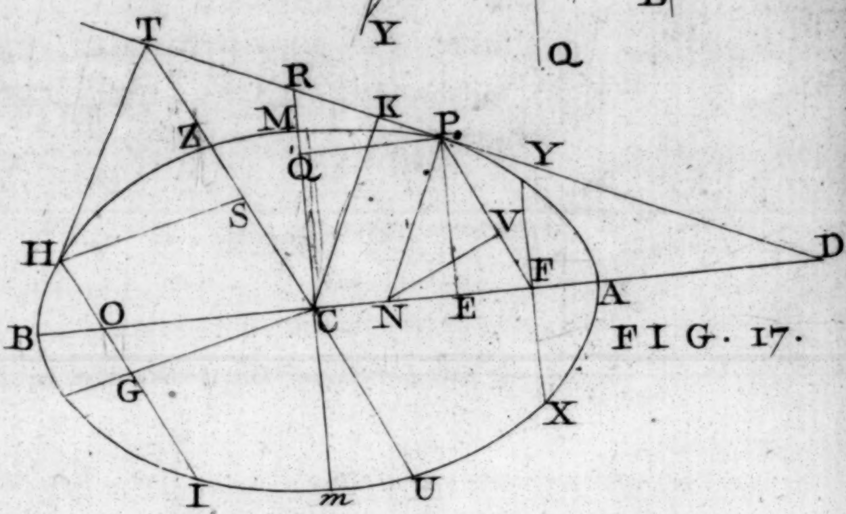


FIG.17.

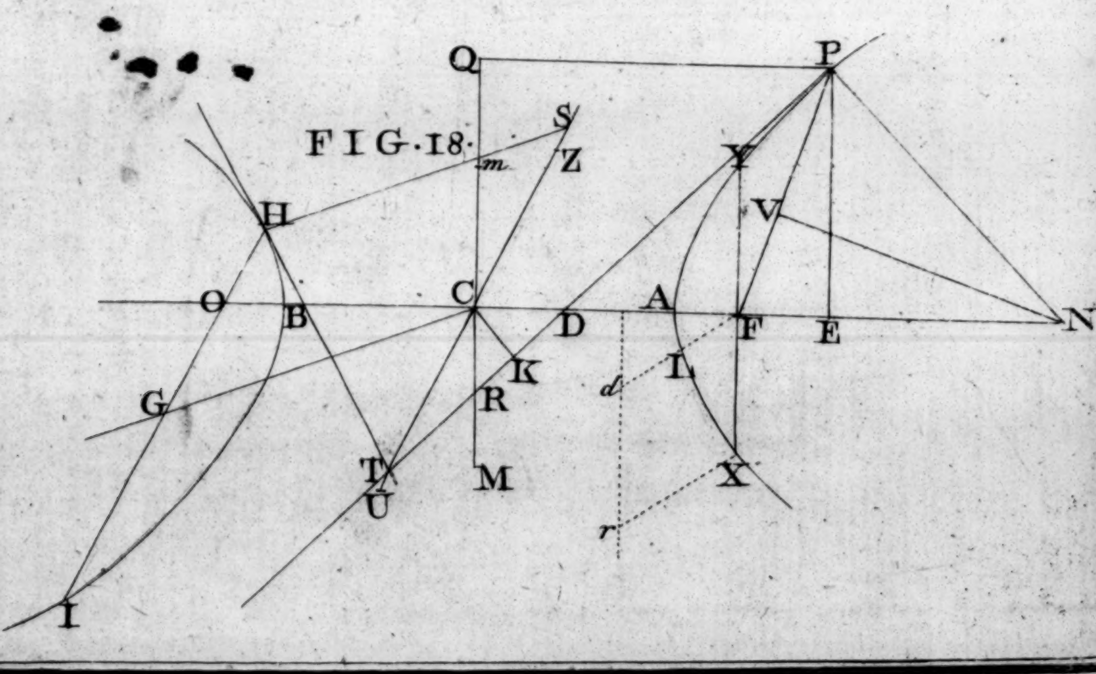


FIG.18.

æqualis ipsi DP (34. 1.) hoc est, ipsi CA per constructionem; est ergo punctum F ad circumferentiam circuli circa AB descripti; quoniam igitur triangula PEG, FEC sunt similia, erit quadratum ex PE, ad (quadratum ex FE sive) rectangulum BEA, ut quadratum ex (GP sive) CM, ad quadratum ex (CF sive) CA, est ergo punctum P in Ellipsi per Cor. 34. lib. 1. *Q. E. D.*

Cor. Hinc si duæ rectæ AB, MN se invicem ad angulos rectos bifariam secent in puncto C, & recta DG sit æqualis differentiæ inter ipsas CA, CM, & GP (producta ultra punctum G quod est in recta majore AB) sit æqualis ipsi CM, & recta DG ita moveatur per quatuor angulos rectos ut punctum D sit semper in recta MN & G in ipsa AB; punctum P describet Ellipsim cujus axis transversus est recta AB & axis secundus recta MN. Et hinc Ellipsis describitur ope instrumenti quod *Circinus Ellipticus* appellatur, ut cuivis ejus structuram perspicienti hinc facile patebit.

PROP. XXXIII. PROBL. III.

Datâ positione rectâ indefinitâ, & puncto in ea dato, & datâ rectâ ab ea bifariam sectâ; describere Parabolam cujus diameter sit recta indefinita data, verticem habens punctum datum, & cui ordinatim applicata sit recta data ab ea bifariam secta.

PRIMUM, sit AB recta indefinita positione data bifariam et ad angulos rectos secans in puncto C rectam datam OS, & sit A punctum in recta AB datum. Fig. 23.

Inveniatur recta QR, quæ tertia proportionalis sit ipsis CA, CO, et a puncto A sumatur in recta AB et versus C segmentum AF æquale quartæ parti ipsius QR, & sit AD in recta AB æqualis ipsi AF, & per punctum D ducatur recta indefinita DX ipsi AB perpendicularis; tum plano XDF imponatur norma HEG, ita ut

 latus

latus ejus HE applicetur rectæ DX & alterum latus EG ſit ad iſtas partes ipſius DX ad quas eſt punctum F, et extremitati G lateris EG annectatur extremitas fili GPF ejuſdem longitudinis cum latere EG, et figatur altera extremitas ejus in puncto F; adducatur pars fili GP ope paxilli P ad latus normæ EG, et juxta ipſum tendatur, deinde moveatur normæ latus HE ſecundum rectam DX, & interea filum paxillo diſtentum ſemper lateri normæ EG applicatum teneatur; linea motu paxilli P deſcripta erit Parabola deſcribenda.

Tranſeat enim Parabola per puncta O, A, S (per 33. lib. 1.) in qua ſit recta AB diameter et vertex ejus A, et cui ipſa OS ſit ordinatim applicata; erit diameter AB axis (per Def. 22. lib. 1.) et ejus parameter erit recta AF vel AD quater ſumpta, per conſtructionem et Def. 1. et proinde eſt punctum F focus et recta DX directrix hujuſce Parabolæ (per Def. 3. et Cor. 2. ad Def. 6.) quoniam igitur totum filum GPF ſit æquale lateri normæ EG, pars ejus PF, diſtantia ſciz. paxilli a foco Parabolæ, erit æqualis ipſi PE perpendiculari a paxillo ductæ ad directricem; movebitur ergo paxillum P ſemper in Parabola OAS (per Cor. 2. 12. hujus) et proinde motu ſuo ipſam deſcribet.

Secundo, ſit recta poſitione data VL bifariam ſecans in Y datam rectam MN, ſed non ad angulos rectos, et ſit V punctum in VL datum.

Inveniatur recta QR quæ tertia proportionalis ſit ipſis YV, YM et a puncto V ſumatur in recta VL ſegmentum VK quarta pars ipſius QR & ad partes puncti V contrarias iis ad quas eſt Y, et per V ducatur recta VT ipſi MN parallela, & recta VF æqualis ipſi VK faciens angulum TVF æqualem angulo TVK, per punctum K ducatur recta DX perpendicularis ipſi VL; tum in puncto F figatur una extremitas fili & ope paxilli et normæ deſcribatur Parabola, ut in caſu præcedente, cujus directrix ſit recta DX et focus F, erit hæc Parabola deſcribenda. Tranſibit enim per punctum V propter

æquales

æquales VF, VK (per Cor. 2. 12. huj.) & recta VL directrici perpendicularis erit diameter (Cor. 1. Def. 6.) & VK quater ſumpta erit ejus parameter (Cor. 2. 25. huj.) et recta VT ipſam continget (per 15. huj.) propter angulos TVF, TVK æquales, ideoque recta MN huic contingenti parallela ordinatim applicatur diametro VL, & propter quadratum ex YM vel YN, per conſtructionem, æquale rectangulo contento abſciſſâ YV & parametro diametri VL, erunt puncta M & N in hac Parabola per Cor. 1. 1. hujus. *Q. E. F.*

Cor. I. Hinc ſi detur poſitione directrix DX, & vertex axis ſciz. punctum A; deſcribi poterit Parabola, ducendo AD perpendicularem ad directricem & faciendo AF æqualem ipſi AD, erit enim F focus: ſimiliter ſi vertex A & focus F dentur; jungatur AF & producatur ad D, ut AD ſit æqualis ipſi AF, et perpendicularis ad DA per D ducta erit directrix. Si vero detur axis AB poſitione, ipſiuſque vertex A, & parameter QR, inveniatur focus ex ipſius definitione; ſimiliter dato poſitione axe & datis foco & parametro axis, inveniri poterit directrix, igitur in his caſibus deſcribi poterit Parabola, ut in hac propoſitione.

Cor. II. Hinc etiam, ſi poſitione detur Parabolæ diameter VL, ipſiuſque vertex V, et ſi parameter ejus ſciz. recta QR magnitudine detur, & punctum P in Parabola; deſcribi poterit Parabola. Sumatur enim in recta VL ſegmentum VK æquale quartæ parti ipſius QR, et per K ducatur recta KE ipſi VL perpendicularis; & per punctum P ducatur PE perpendicularis ad ipſam KE, tum centris V et P, intervallis VK et PE, deſcribantur circuli ſibi invicem occurrentes in duobus punctis F et G; ſi deſcribatur Parabola, cujus directrix eſt ipſa KE et focus punctum F vel G, tranſibit hæc per puncta V et P (Cor. 2. 12. huj.) et erit VL ipſius diameter (Cor. 1. ad Def. 6.) & erit VK quater ſumpta, hoc eſt, ipſa QR parameter iſtius diametri (Cor. 2. 25.) manifeſtum eſt, quod in hoc caſu duæ deſcribi poſſunt Parabolæ quæ Problemati Fig. 24.
ſatisfacient;

ſatisfacient; una vero tantum, ſi circuli jam deſcripti in unico puncto occurrant; ſi vero hi circuli non ſibi invicem occurrant, Problema in iſto caſu eſt impoſſibile.

PROP. XXXIV. PROBL. IV.

Datis poſitione & magnitudine duabus rectis ſe invicem bifariam ſecantibus; Ellipſim deſcribere in qua datæ rectæ ſint diametri conjugatæ.

Fig. 25. PRIMUM, ſint AB, MN datæ rectæ ſe invicem ad angulos rectos bifariam ſecantes in C; & quoniam in hoc caſu oportet rectas AB, MN eſſe inæquales (per Cor. 2. 31. lib. 1.) deſcribatur circulus, centro M termino minoris rectæ MN et intervallo CA dimidio majoris AB, ſecans ipſam AB in punctis F et O, & in ipſis F et O figantur extremitates fili ejuſdem longitudinis cum recta AB, et ope paxilli P tendatur filum et circumducatur paxillus P donec ad eum locum redeat a quo cœpit moveri; linea motu ejus deſcripta erit Ellipſis in qua rectæ AB, MN ſunt diametri conjugatæ.

Tranſeat enim Ellipſis per puncta A, M, B, N, in qua rectæ AB, MN ſunt diametri conjugatæ (per Prop. 34. lib. 1.) et quoniam hæ diametri conjugatæ ſe invicem ſecant ad angulos rectos, erit ipſarum major AB axis tranſverſus et minor MN axis ſecundus Ellipſeos; et erunt F et O ipſius foci, per conſtructionem et Cor. 1. ad Def. 5.

Quoniam igitur ſumma rectarum, quæ a paxillo P ad focos ducuntur, ſit ſemper æqualis ipſi AB, paxillum P dum circumducitur, erit in Ellipſi, per Cor. 2. 14. hujus, et proinde ipſam motu ſuo deſcribet.

Secundo, datæ ſint duæ rectæ ſe invicem, non ad angulos rectos, bifariam ſecantes. Manifeſtum eſt duas Ellipſes non habere poſſe idem centrum et duas diametros conjugatas poſitione et magnitudine

dine easdem, nam si possint omne punctum in una Ellipsi esset etiam in altera (per Cor. 34. lib. 1.) hoc est, ipsæ Ellipses coincident; datis igitur duabus diametris conjugatis Ellipseos positione et magnitudine, datur ipsa Ellipsis et proinde dantur axes ejus positione et magnitudine; his igitur inventis, per Prop. 7. hujus, ipsa Ellipsis describi potest ut in casu præcedente.

PROP. XXXV. PROBL. V.

Datis positione & magnitudine duabus rectis se invicem bifariam secantibus; Hyperbolas oppositas describere quarum datæ rectæ sint diametri conjugatæ.

SINT primum AB, MN datæ rectæ se invicem ad angulos rectos bifariam secantes in C, jungatur AM & a puncto C sumantur utrinque in recta AB producta segmenta CF et CO æqualia ipsi AM; ad punctum O affixa sit extremitas regulæ OG ut circa punctum hoc tanquam centrum libere circumagi possit; & alteri regulæ extremitati G annectatur extremitas fili cujus longitudinem regula OG excedit quantitate æquali rectæ AB, figatur altera extremitas fili in puncto F, & adducatur filum ope paxilli P ad latus regulæ OG, et juxta ipsum tendatur, deinde moveatur regula circa punctum O, et interea filum paxillo distentum semper regulæ applicatum teneatur; paxillus P motu suo describet unam ex Hyperbolis oppositis quarum rectæ AB, MN sunt diametri conjugatæ. Fig. 26.

Intelligantur enim Hyperbolæ oppositæ describi (per 35. lib. 1.) quarum AB sit diameter transversa, & MN diameter secunda ei conjugata; erit punctum C centrum, et quoniam hæ diametri conjugatæ se invicem ad angulos rectos secant, erit AB axis transversus, et MN axis secundus, et proinde erunt puncta F et O Hyperbolarum foci, per constructionem & Cor. 2. ad Def. 5. quoniam vero excessus regulæ GPO supra filum GPF sit æqualis ipsi

ipsi AB, erit excessus rectæ PO supra ipsam PF æqualis ipsi AB axi transverso; ideoque dum regula movetur erit paxillus P in alterutra Hyperbolarum per Cor. 4. 14. hujus. Si vero ejusdem regulæ extremitas, quæ in puncto O affixa fuit, jam in puncto F affigatur, & extremitas fili in puncto O figatur, et eadem, quæ prius, peragantur; describetur Hyperbola opposita Hyperbolæ jam descriptæ, ut patet.

Secundo, si rectæ datæ se invicem non ad angulos rectos secent. Datis duabus diametris conjugatis Hyperbolæ positione & magnitudine, dantur ipsæ Hyperbolæ & ipsarum axes positione et magnitudine dantur ut in casu secundo Prop. præc. ergo axibus inventis (per Prop. 7. huj.) ipsæ Hyperbolæ describi possunt ut in casu præcedente.

Cor. *Ad hanc & præcedentem propositionem.* Hinc si detur magnitudine & positione axis transversus Ellipseos aut Hyperbolæ AB, et foci ejus F et O; describi poterit Ellipsis aut Hyperbola. Vel si detur diameter quævis AB positione & magnitudine, & recta PE quæ a dato in Ellipsi aut Hyperbola puncto P ordinatim applicatur diametro AB; describi poterit Ellipsis aut Hyperbola; bifariam enim secetur AB in C, et per C ducatur recta parallela ipsi PE, in qua sumantur æquales CM, CN, ita ut quadratum ex CA sit ad quadratum ex CM vel CN, ut rectangulum AEB sit ad quadratum ex PE; et ope præcedentium describatur Ellipsis, aut Hyperbola, in qua rectæ AB, MN sint diametri conjugatæ; transibit per punctum P, per Cor. 34. & 35. lib. 1.

PROP.

PROP. XXXVI. PROBL. VI.

Datis positione directrice & asymptoto Hyperbolæ, & ejus foco huic directrici propiore dato; ipsam describere.

SIT recta DX directrix Hyperbolæ, & F focus ejus isti directrici propior, & sit recta CY parallela uni ex ejus asymptotis; plano in quo est Hyperbola imponatur norma ita ut latus ejus HE applicetur rectæ DX, et alterum latus EG sit ad istas partes ipsius DX ad quas est F, & inclinetur latus normæ EG ad latus HE ut fiat ipsi CY parallelum; tum ope paxilli P et fili lateri EG applicati, cujus extremitas in puncto F affigitur, perficiantur omnia ut in Parabola describenda Prop. 33. hujus; linea motu paxilli P descripta erit Hyperbola, cujus derectrix est recta DX, et asymptotos parallela ipsi CY, et focus F. Nam quoniam filium GPF est æquale ipsi GPE, erit recta PF a paxillo ad focum ducta æqualis rectæ PE ab eodem paxillo ductæ ad directricem & asymptoto parallelæ: & proinde paxillus P movetur in Hyperbola cujus directrix est recta DX & punctum F focus huic directrici propior, & cujus asymtotos est ipsi CY parallela, per Cor. Prop. 13. hujus. Fig. 27.

Cor. Si planum superficiem conicam secans, & sectionem faciens Parabolam quam minimum inclinetur ita ut superficiei oppositæ occurrat, sectio statim mutatur in Hyperbolam; eadem etiam similitudo inter hasce sectiones observari potest in ipsarum descriptionibus in plano; nam si latus normæ, cui filum applicatur in Parabola describenda, ad alterum latus inclinetur, paxillus Hyperbolam describet, & præterea, cum in his sectionibus describendis latus normæ per focum transit, pars fili PF inter focum et paxillum erit quarta pars parametri axis utriusque sectionis, ut constat ex Def. foci Parabolæ et ex Cor. Prop. 26. hujus.

Q PROP.

PROP. XXXVII.

Fig. 28, 29, 30. Sit conus rectus GVH & in ejus ſuperficie ſit ſectio conica PAR, & ſit LNO circulus, ſectioni non occurrens, cujus diſtantia AL a vertice ſectionis eſt æqualis ipſi AF diſtantiæ ejuſdem verticis a foco F huic circulo propiore; dico quod interſectio plani hujuſce circuli cum plano ſectionis erit ipſius directrix; et quod PN, latus coni interceptum inter hunc circulum & quodvis punctum ſectionis P, erit æquale rectæ ab eodem puncto ductæ ad focum F circulo propiorem.

SECETUR conus per axem ejus VX plano GVH, perpendiculari ad planum ſectionis PAR, ipſum interſecante in recta AFB, erit hæc recta axis ſectionis, qui in Ellipſi aut Hyperbola erit tranſverſus, et proinde erunt vertex ſectionis A, focus F et recta AL in plano GVH; quoniam vero tam planum ſectionis PAR quam planum circuli LNO, eſt plano GVH perpendiculare, erit DE ipſorum interſectio perpendicularis ad planum GVH (19. 11.) et proinde ad axem ſectionis AB, et quia eadem DE eſt in plano circuli LNO erit plano baſis coni parallela; ſit recta DL interſectio plani GVH cum plano circuli LNO, erit hæc parallela plano baſis, ut patet.

Fig. 28. *Caſ.* 1. Primum, ſit ſectio PAR Parabola, et puncto in ipſa P ducatur recta PQ ad axem ei ordinatim applicata, hæc erit rectæ DE, et proinde plano baſis, parallela; per ipſam PQ tranſeat planum baſi parallelum interſecans planum GVH in recta GQH, quæ erit ipſi DL parallela (16. 11.) Quoniam igitur triangula GAQ DAL ſunt ſibi invicem et triangulo GVH ſimilia, et rectæ GV, HV

HV ſunt æquales, quia conus eſt rectus, erunt GA, QA ut et DA, LA æquales, & proinde erit QD æqualis ipſi GL; ergo cum DA diſtantia rectæ DE a vertice Parabolæ ſit æqualis ipſi AL, hoc eſt, ipſi AF diſtantiæ foci a vertice, recta DE axi AB perpendicularis erit Parabolæ directrix, ergo conſtat prima pars Propoſitionis, cum ſectio eſt Parabola. Si igitur a puncto P ducatur recta PF ad focum, erit æqualis perpendiculari ductæ a P ad directricem (per 12. huj.) hoc eſt, ipſi QD ſive GL; ſed GL, PN æquantur, utpote ſegmenta laterum coni recti inter circulos parallelos intercepta; ergo PN æqualis eſt ipſi PF.

Caſ. 2. Secundo, ſit ſectio PAR Ellipſis & centrum ejus C, ducatur CP ſemiaxis ſecundus, erit rectæ DE, & proinde plano baſis, parallelus; per rectam CP tranſeat planum baſi parallelum interſecans planum GVH in recta MCK ipſi DL parallela (16. 11.) erit MK diameter circuli MPK, & propter circulum erit rectangulum MCK æquale quadrato ex CP ſemiaxe ſecundo; a vertice coni V ducatur recta ipſi AB parallela, occurrens GH baſis diametro productæ in S. Tum per Prop. 10. lib. 1. rectangulum ACB ſive quadratum ex CA eſt ad rectangulum MCK ſive quadratum ex CP, ut quadratum ex VS ad rectangulum HSG, ergo convertendo, quadratum ex CA eſt ad ejus exceſſum ſupra quadratum ex CP, hoc eſt, quadratum ex CF (Cor. 1. Def. 5. huj.) ut quadratum ex VS ad ejus exceſſum ſupra rectangulum HSG, hoc eſt, quadratum ex VH ſive VG; ſed (ob ſimilia triangula VSG, ACM) quadratum ex CA eſt ad quadratum ex AM, ut quadratum ex VS ad quadratum VG, ergo ipſæ rectæ CF & AM ſunt æquales, propter autem parallelas MC, DL, erit MA ſive CF, diſtantia foci a centro, ad ſemiaxem CA, ut LA ſive FA ad DA diſtantiam rectæ DE a vertice Ellipſeos A, ergo recta DE, cum ſit axi perpendicularis, erit directrix, per Cor. 2. 11. hujus, Fig. 29.

 ergo

ergo constat prima pars Propositionis cum sectio est Ellipsis. Ducatur nunc a quovis puncto P in Ellipsi recta PC perpendicularis ad axem AB, & per PC transeat planum circuli occurrens lateribus VG, VH in M & K, & intersecans planum GVH in recta MK ipsi DL parallela, quoniam igitur CD est æqualis perpendiculari ductæ a P ad directricem DE, si ducatur PF ad focum, erit (per 11. huj.) PF ad CD, ut FA sive LA ad DA: sed ML est etiam ad CD, ut LA ad DA; ergo PF, ML æquantur, sed ML, PN æquantur ut in casu præcedente; ergo PN æqualis est ipsi PF.

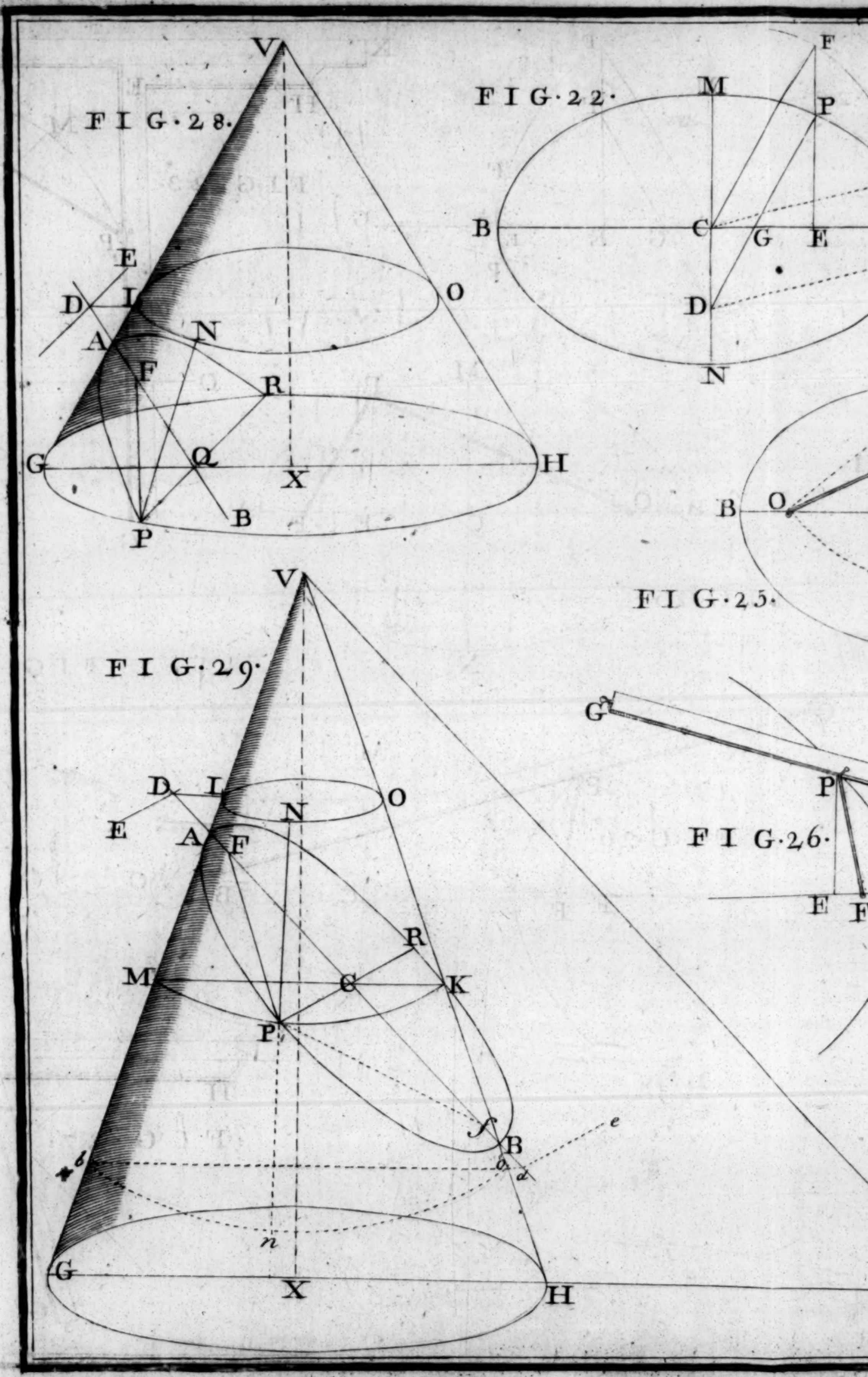
Fig. 30. *Cas.* 3. Tertio, sit sectio PAR Hyperbola & sit recta PR intersectio plani ejus cum plano basis HPG, erit hæc parallela ipsi DE 16. 11.) & proinde ordinatim applicata axi transverso AB cui productæ occurrat in Q. sit HQG intersectio plani HVG cum plano basis, erit hæc parallela ipsi DL (16. 11.) a centro Hyperbolæ C ducatur recta, parallela ipsis HQG, DL, occurrens lateribus coni HV, GV in punctis K, M, & a vertice coni ducatur VS, axi Hyperbolæ AB parallela, occurrens ipsi HQG in S, & sit CT semiaxis secundus Quoniam per Prop. 10. lib. 1. quadratum ex CA est ad rectangulum KCM, ut quadratum ex VS ad rectangulum HSG, & similiter, in eadem ratione est rectangulum AQB (contentum abscissis) ad rectangulum HQG sive quadratum ex ordinata PQ. erit rectangulum KCM æquale quadrato ex semiaxe secundo CT, per Def. 24. lib. 1. & proinde convertendo, quadratum ex CA est ad summam quadratorum ex CA, CT, hoc est, quadratum ex CF (Cor. 2. Def. 5. huj.) ut quadratum ex VS ad summam quadrati ex VS & rectanguli HSG, hoc est, quadratum ex VG; est autem (ob similia triangula CAM, SVG) quadratum ex CA ad quadratum ex MA, ut quadratum ex VS ad quadratum ex VG, ergo ipsæ rectæ CF, MA sunt æquales; propter autem parallelas MC, DL, erit CA ad MA sive CF, ut DA ad LA sive AF, est igitur recta DE directrix sectionis (Cor. 2. 11. huj.) ergo constat in hoc casu prima pars Propositionis.

Ducatur

Ducatur nunc a quovis puncto in Hyperbola recta PF ad focum & PQ perpendicularis ad axem Hyperbolæ AB, & per PQ agatur planum circuli GPHR, oſtendetur iiſdem verbis ac in caſu præcedente, quod recta PF ſit æqualis ipſi GL & proinde ipſi PN.

Q. E. D.

Cor. Cum Ellipſeos aut Hyperbolæ duo ſunt foci F & *f*, duo erunt circuli LNO, *lno* quales in Propoſitione deſcribuntur, quorum plana interſecabunt planum ſectionis in rectis DE, *de*, quæ erunt directrices ſectionis; & quoniam rectæ PF, P*f*, ad focos ductæ, ſunt æquales ipſis PN, P*n*, erit N*n* ſegmentum cujuſvis lateris coni inter circulos LNO, *lno* interceptum æquale axi tranſverſo ſectionis per Prop. 14. hujus.



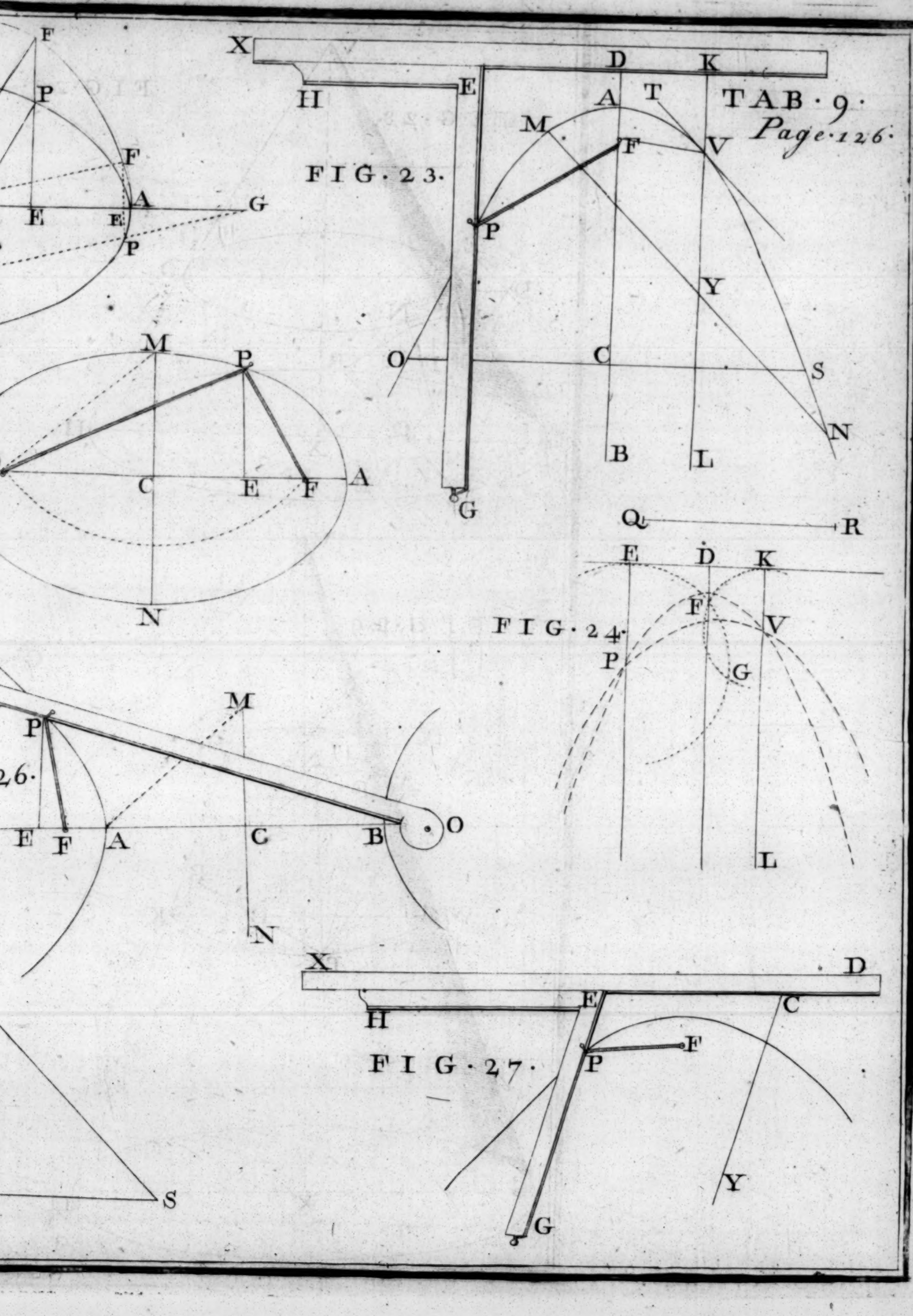
FIG·28.

FIG·22.

FIG·25.

FIG·29.

FIG·26.


TAB. 9.
Page. 126.
FIG. 23.
FIG. 24.
26.
FIG. 27.

SECTIONUM CONICARUM

LIBER TERTIUS.

De Parabola.

PROPOSITIO I.

Si Recta FG contingens Parabolam in F occurrat duabus diametris VC, DH in punctis G & R; quadrata ex FG, FR, ſegmentis contingentis inter contactum F & diametros, erunt ad ſe invicem ut GV, RD ſegmenta diametrorum inter ipſarum vertices & contingentem. Vel ſi recta AB ſecans Parabolam occurrat duabus diametris FL, VC in punctis K, E; rectangula AKB, AEB erunt ad ſe invicem, ut FK, VE ſegmenta diametrorum inter ipſarum vertices & ſecantem AB. Fig. 1.

Pars

Pars 1. SIT recta P parameter diametri quæ per contactum F transſit, quadratum ex FG eſt æquale rectangulo GV in P, & quadratum ex FR eſt æquale rectangulo RD in P (per Prop. 2. lib. 2.) ergo quadrata ex FG & FR ſunt ad ſe invicem ut ſegmenta GV, RD.

Pars 2. Sit recta P parameter diametri, cui ipſa ſecans AB ordinatim applicatur; rectangulum AKB eſt æquale rectangulo FK in P, & rectangulum AEB eſt æquale rectangulo VE in P (3. lib. 2.) ergo rectangula AKB, AEB ſunt ad ſe invicem ut ſegmenta FK, VE. *Q. E. D.*

Cor. Occurrat recta Parabolæ in punctis A, B, & ſit F vertex diametri occurrentis rectæ AB in K; ſi a quovis alio puncto E ipſius AB ducatur recta EV parallela ipſi FK & quæ ſit ad FK, ut rectangulum AEB ad rectangulum AKB; erit punctum V in Parabola cujus diameter eſt FK, & quæ tranſit per puncta A, F, B. Cum punctum E ſit inter A & B, recta EV ducenda eſt ad iſtas partes rectæ AB ad quas eſt punctum F, ſecus ad contrarias.

PROP. II.

Si a verticibus duarum diametrorum ducantur ordinatim applicatæ ad ipſas diametros; abſciſſæ inter ordinatas & vertices diametrorum erunt inter ſe æquales.

Fig. 2. A Verticibus diametrorum FG, HM ducantur FL, HK ordinatim applicatæ ad diametros HM, FG; abſciſſæ HL, FK erunt æquales.

Ducatur enim a vertice diametri HM recta Parabolam contingens, occurrens diametro FG in A; propter parallelogrammum HAFL, abſciſſa HL eſt æqualis ipſi AF, hoc eſt, abſciſſæ FH; per Prop. 47. lib. 1. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. III.

Si latus alicujus trianguli ſit diametris Parabolæ parallelum; quadrata ex reliquis lateribus erunt inter ſe ut parametri diametrorum quæ habent ordinatas ſuas iſtis lateribus parallelas.

SIT LMN triangulum cujus latus MN ſit parallelum diametris Parabolæ BFH, & ſint rectæ P & Q parametri diametrorum ED, FR quæ habent ordinatas ſuas BC, BR ipſis LM, LN parallelas; erit quadratum ex LM ad quadratum ex LN, ut P ad Q. Fig. 3.

Ducantur enim per E & F, vertices diametrorum ED, FR, rectæ EG, FG Parabolam contingentes, erunt parallelæ ipſis LM, LN (per hypoth. et Cor. 8. 25. lib. 1.) occurrat contingens EG diametro FR in A, & a contactu E ducatur EK ordinata ad diametrum FR erit parallela ipſi FG, & (per 47. lib. 1.) KF, FA erunt æquales, ergo æquales ſunt EG, GA. Quoniam igitur latera triangulorum LMN, GAF ſunt mutuo-parallela, erunt iſta triangula æquiangula: ergo quadratum ex LM eſt ad quadratum ex LN, ut quadratum ex (GA ſive) GE ad quadratum ex GF, hoc eſt, ut recta P ad Q. per Cor. 1. Prop. 3. lib. 2. *Q. E. D.*

Cor. I. Si a quovis puncto Parabolæ B ducatur ad diametrum ED recta BC ei ordinatim applicata, & quævis alia recta BD; erit quadratum ex BD æquale rectangulo contento abſciſſà EC & parametro diametri FR cui recta ordinatim applicata eſt ipſi BD parallela. Sit recta Q parameter diametri FR & P parameter diametri ED; per hanc Propoſitionem quadratum ex BC eſt ad quadratum ex BD, ut (P ad Q ſive ut) P in EC ad Q in EC: ſed (per 1. lib. 2.) quadratum ex BC eſt æquale rectangulo P in EC: ergo quadratum ex BD æquale eſt rectangulo Q in EC.

Cor. II. Si recta OE contingat Parabolam & a puncto in ea O ducatur recta ſecans Parabolam in B, H punctis, & occurrens in D diametro ductæ per contactum E; quadratum ex ſegmento OD inter contingentem & diametrum erit æquale rectangulo BOH contento ſegmentis ſecantis inter contingentem & Parabolam. Nam per hanc Propoſitionem quadratum ex OD eſt ad quadratum ex OE, ut rectangulum BOH (per Cor. 3. 3. lib. 2.) ad quadratum ex eadem OE.

Cor. III. Parameter alicujus diametri Parabolæ eſt ad parametrum axis, ut quadratum radii ad quadratum ſinus anguli quem iſta diameter cum ſuis ordinatis comprehendit, ut patet ex hac Propoſitione, & ex eo quod quadrata laterum trianguli ſunt ut quadrata ſinuum angulorum oppoſitorum. Et proinde parametri diametrorum alicujus Parabolæ ſunt inter ſe reciproce, ut quadrata ſinuum angulorum quos ipſæ diametri cum ſuis ordinatis comprehendunt; ideoque parameter principalis, id eſt parameter axis, eſt minor quâvis aliâ parametro.

PROP. IV.

Si linea jungens terminos duarum ordinatarum occurrat diametro cui applicantur; pars diametri inter verticem ejus & rectam jungentem, erit media proportionalis inter abſciſſas.

Fig. 4. SINT rectæ EB, GD ordinatim applicatæ diametro Parabolæ AD, & ducatur recta jungens puncta E & G occurrens diametro AD in C; erit CA media proportionalis inter abſciſſas AB, AD.

Ducantur enim per puncta E et G duæ contingentes quæ occurrant diametro AD in H et F, erunt AH, AB æquales, ut etiam AF, AD, (47. lib. 1.) ſed conſtat (ex Prop. 54. lib. 1.) quod AC inter

inter verticem diametri et jungentem contactus EG eſt media inter AH et AF, ergo eſt media inter AB et AD. *Q. E. D.*

Cor. Hinc, ſi a puncto Parabolæ E ducantur duæ rectæ, una contingens, altera ipſam ſecans in punctis E et G, quæ occurrant diametro cuivis AL in H et C; erunt EC, CG ſegmenta ſecantis inter diametrum et Parabolam ad ſe invicem, ut AH, AC ſegmenta diametri inter verticem et contingentem, et verticem et ſecantem. Si enim EG ſit ordinatim applicata diametro AL, erit EG bifariam ſecta in C, & HC in A; ſi EG non ſit ordinatim applicata ipſi AL, a punctis E, G ducantur EB, GD ordinatim applicatæ diametro AL, et ob ſimilia triangula, eſt quadratum ex EC ad quadratum ex CG, ut quadratum ex EB ad quadratum ex GD, (hoc eſt, ut abciſſa AB ad abciſſam AD, ſive ob proportionales AB, AC, AD) ut quadratum ex AB ad quadratum ex AC; ergo erit ipſa EC ad CG, ut (AB ſive) AH ad AC.

PROP. V.

Sit recta HK ordinatim applicata diametro FB; per terminum ipſius HK ducatur diameter HC, & a vertice diametri FB ducatur recta Parabolæ iterum occurrens in O, & diametro HC in L, & ipſi HK in N; erunt FO, FL, FN proportionales. Fig. 5.

DUCANTUR enim a punctis O et L duæ rectæ OP et LS, ad diametrum FB parallellæ ordinatæ HK; erit OP ordinata ad diametrum FB, et LS erit ipſi HK æqualis; tum propter parallellas OP, LS, erit quadratum ex FO ad quadratum ex FL, ut quadratum ex OP ad (quadratum ex LS ſive) HK, hoc eſt, ut abſciſſa FP ad abſciſſam FK, vel (propter parallelas OP, HK) ut ipſa FO ad FN: ergo proportionales ſunt rectæ FO, FL, FN. *Q. E. D.*

SCHOLIUM.

Fig. 5. *SI duæ rectæ indefinitæ DE, CM, sibi invicem in dato angulo occurrant in puncto H, & circa punctum quodvis F revolvatur recta indefinita occurrens rectis DE, CM in L, N punctis, & in recta revolvente sumatur punctum O ad easdem partes puncti F ad quas est N (occursus rectæ mobilis cum recta DE) ita ut FO, FL, FN sint continuæ proportionales.* Locus *omnium punctorum O, erit Parabola transiens per F & H puncta, & in qua recta CM erit diameter & recta DE erit parallela ordinatim applicatis diametro quæ per punctum F transit. Si vero in hac recta revolvente sumaretur FO media proportionalis inter ipsas FL, FN linea motu puncti O descripta esset Hyperbola. Vide* Schol. *post Prop.* 46. *lib.* 1.

PROP. VI.

Si tres rectæ Parabolam contingentes inter se conveniant; in eadem ratione secabuntur, sciz. inter ipsarum occursus & puncta contactus.

Fig. 6, 7. SIT ABC Parabola, quam rectæ AD, FE, DC contingunt in punctis A, B, C; erit ut AF ad FD, ita FB ad BE, et DE ad EC. Sit enim B punctum contactus positum in segmento Parabolæ inter reliqua puncta A et C; jungatur AC et bifariam dividatur in G, diameter per G ducta transibit per occursum contingentium AD, CD, Cor. 1. 26. lib. 1.

6. *Cas.* 1. Si diameter DG transeat per B, erit contingens FBE parallela ipsi AC et ergo in puncto B bifariam secabitur, et quoniam GB, BD sunt æquales, contingentes AD, CD bifariam secabuntur in F et E, ob AC, FE parallelas.

7. *Cas.* 2. Si vero diameter DG non transeat per B; junctis AB, BC, ducantur per puncta F, B, E diametri FHL, BN et EKM; et (per Cor. 1. 26. lib. 1.) æquales erunt AH, HB et proinde

inde AL, LN erunt æquales; pari ratione erunt NM, MC, æquales; ergo LM eſt æqualis (dimidio ipſius AC hoc eſt) ipſi GC, & proinde (demptâ communi GM) erit LG æqualis ipſi MC ſive NM, et ergo erit LN æqualis ipſi GM; his præmiſſis, erit AF ad FD, ut AL ad LG (2. 6.) hoc eſt, ut LN ad NM, ſive ut GM ad MC; ſed ut LN ad NM, ita eſt FB ad BE, & ut GM ad MC, ita eſt DE ad EC: ergo ut AF ad FD, ita eſt FB ad BE, & DE ad EC.

Q. E. D.

PROP. VII. PROBL. I.

Datis poſitione directrice DX & foco F Parabolæ, & rectâ MN, diametris non parallelâ, poſitione datâ; huic parallelam ducere quæ Parabolam contingat. FIG. 8.

A FOCO F ducatur FO perpendicularis ad MN occurrens directrici in E, & bifariam ſectâ FE in T, ducatur TP ipſi MN parallela, quæ occurrat in puncto P perpendiculari ad directricem per E ductæ; & junctâ PF, erunt triangula PTE, PTF æqualia (4. 1.) & proinde cum FP ſit æqualis ipſi PE erit punctum P in Parabola (Cor. 2. 12. lib. 2.) & quoniam anguli EPT, FPT æquantur, recta PT ipſi MN parallela Parabolam continget. *Q. E. F.*

PROP. VIII. PROBL. II.

Parabolam deſcribere, quæ per data tria puncta tranſeat, & cujus diametri ſint parallelæ rectæ poſitione datæ, quæ non ſit parallela jungenti duo e punctis datis.

SINT B, G, F puncta data non in eadem recta, & ſit QR recta poſitione data; jungatur GF, & a puncto B ducatur recta ipſi QR parallela occurrens ipſi GF in E; ſi recta GF bi- Fig. 9.

fariam

fariam secetur in E, Propositio eadem est cum Prop. 33. lib. 2. Si vero GF non bifariam secetur in E sit bifariam secta in M, & ut rectangulum GEF ad rectangulum GMF, ita sit recta BE ad rectam VM ductam per M & ipsi BE parallelam; tum per Prop. 33. lib. 2. describatur Parabola cujus diameter sit recta VM et ejus vertex V & cui recta GF sit ordinatim applicata, transibit hæc Parabola per punctum B (per Cor. Prop. 1. huj.) & diametri ejus sunt parallelæ rectæ QR per constructionem. Cum punctum E cadit inter G & F, recta VM ducenda est ad eas partes rectæ GF ad quas est punctum B secus ad contrarias. Cor. Prop. 1. hujus.

Q. E. F.

PROP. IX. PROBL. III.

Datis in Parabola quatuor punctis; ipsam describere.

Fig. 9. *Cas.* 1. SINT puncta data A, B, G, F, & conficiant jungentes hæc puncta trapezium nulla habens latera parallela; occurrant duo latera opposita producta in D, & ut rectangulum BDA est ad rectangulum GDF, ita sit quadratum ex DB ad quadratum ex DE segmento rectæ DGF; et junctâ BE, ope præcedentis describatur Parabola per puncta G, B, F, cujus diametri sunt parallelæ ipsi BE, transibit hæc per punctum A.

Quoniam enim rectangulum BDA & quadratum ex DB sunt inæqualia; erunt etiam (ex constructione) rectangulum GDF & quadratum ex DE inæqualia; ergo recta DB non contingit Parabolam (ut patet ex Cor. 2. 3. huj.) ergo eam secat in alio puncto, & si non in A, puta in X; tum (per Cor. 2. Prop. 3. lib. 2.) rectangulum BDX est ad rectangulum GDF, ut quadratum ex DB se habet (per 3. huj.) ad quadratum ex DE, hoc est (per Construc.) ut rectangulum BDA ad rectangulum GDF, ergo æquantur rectangula BDX, BDA, & proinde æquales sunt ipsæ DA, DX, quod est absurdum (nam punctum X est ad eas partes puncti D, ad quas

quas ſunt B et A quia D eſt extra Parabolam) ergo Parabola occurrit rectæ DB in puncto A. Quoniam ſegmentum DE ſumi poteſt in recta DGF ad alterutram partem puncti D, duæ Parabolæ deſcribi poſſunt quæ Problemati ſatisfacient.

Caſ. 2. Sint B, G, F, P quatuor puncta data, & ſint junctæ GF & BP parallelæ; recta MN has parallelas bifariam ſecans erit diameter Parabolæ tranſeuntis per hæc quatuor puncta (per Cor. 6. 25. lib. 1.) deſcribatur igitur Parabola per tria puncta B, G, F, cujus diametri ſint parallelæ rectæ MN et cum recta BN ſit ordinatim applicata diametro hujuſce Parabolæ, et PN æqualis ſit ipſi BN, tranſibit hæc Parabola per punctum P. Patet in hoc caſu, unicam eſſe poſitionem diametrorum Parabolæ quæ per hæc puncta tranſit, et proinde unicam Parabolam per hæc puncta tranſire poſſe.

Cor. Ex conſtructione hujus patet methodus inveniendi poſitionem diametrorum Parabolæ, ex quatuor punctis in ipſa datis.

PROP. X.

Duæ Parabolæ, communem habentes axem & eandem parametrum principalem, in infinitum productæ ad ſe invicem ſemper propius accedunt, nunquam vero conveniunt.

SINT AEF, DCB duæ Parabolæ communem habentes axem EH, et ſit recta PQ utriuſque parameter principalis; ducatur recta axi ordinatim applicata ei occurrens in G et Parabolæ exteriori in punctis A, F & interiori in D. Quoniam quadratum ex AG æquale eſt rectangulo GE in PQ, & quadratum ex DG eſt æquale rectangulo GC in PQ, erit differentia horum quadratorum, hoc eſt rectangulum ADF (5. 2.) æquale, rectangulo CE in PQ; ergo, ob datum CE in PQ, rectangulum ADF erit ſemper ejuſdem magnitudinis, quò vero longius recedit punctum D a vertice Fig. 10.

a vertice C Parabolæ interioris, eò major erit recta DF, & proinde eò minor erit recta AD diſtantia inter Parabolas. Nunquam vero coibunt puncta A, D, ob rectangulum ADF magnitudine datum. *Q. E. D.*

Cor. Hinc, DH ſegmentum interceptum inter vertices duarum diametrorum coincidentium æquale eſt ſegmento EC inter vertices axium. Nam (per 3. lib. 2.) rectangulum ADF eſt æquale rectangulo PQ in DH, & per hanc Propoſitionem idem rectangulum ADF eſt æquale rectangulo PQ in EC, ergo æqualia ſunt ſegmenta DH, EC.

QUADRATURA PARABOLÆ.

PROP. XI.

Fig. 11. Si in Parabola inſcribatur recta BC & per B & C ducantur contingentes ſibi invicem occurrentes in A, & ſi biſecetur recta BC in G & ejus partes iterum biſecentur & ſic deinceps, & per omnia biſecantia puncta, ut D, E, V, G &c. ducantur diametri occurrentes Parabolæ in L, M, N, O &c. & ſi jungantur omnia hæc puncta B, L, M, N, O &c. rectis quæ conficiant figuram inſcriptam, & per eadem puncta B, L, M, N, O &c. ducantur contingentes, quæ conficiant figuram circumſcriptam; erit ſemper figura inſcripta dupla areæ quæ eſt intra triangulum BAC & extra figuram circumſcriptam.

NAM

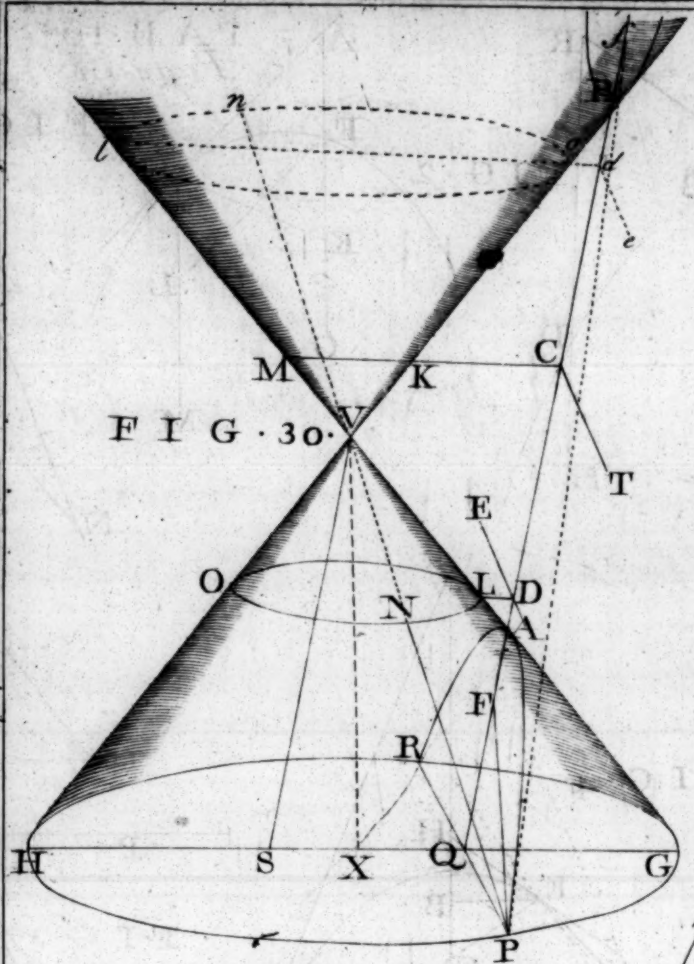


FIG. 30.

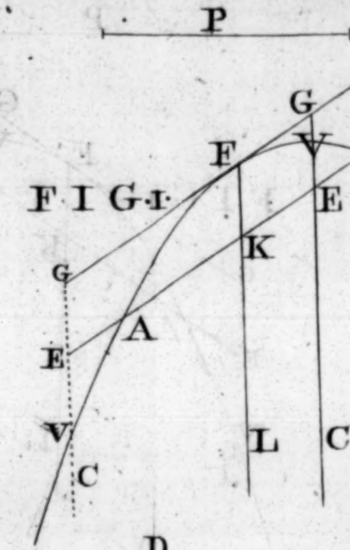


FIG. 1.

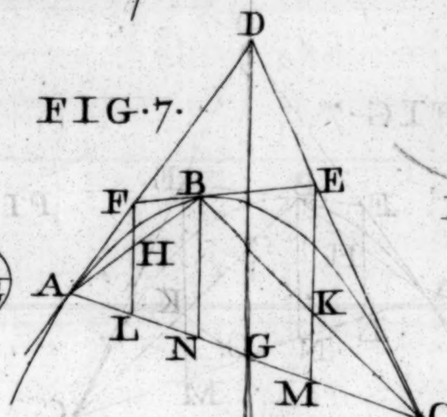


FIG. 7.

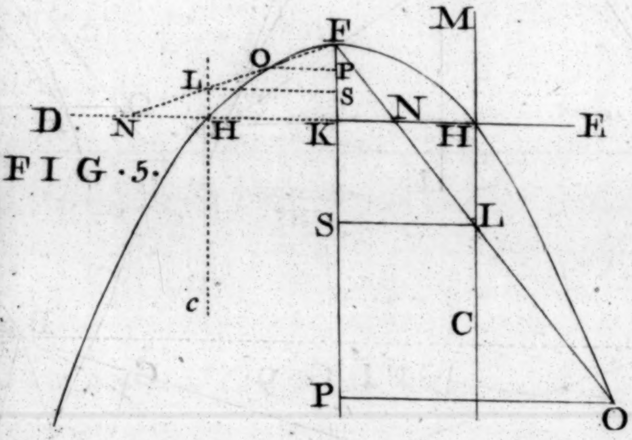


FIG. 5.

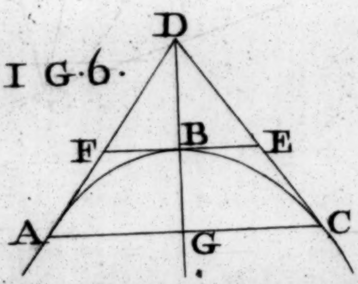


FIG. 6.

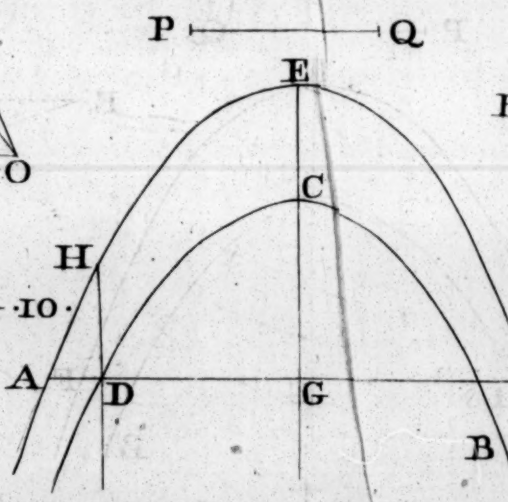
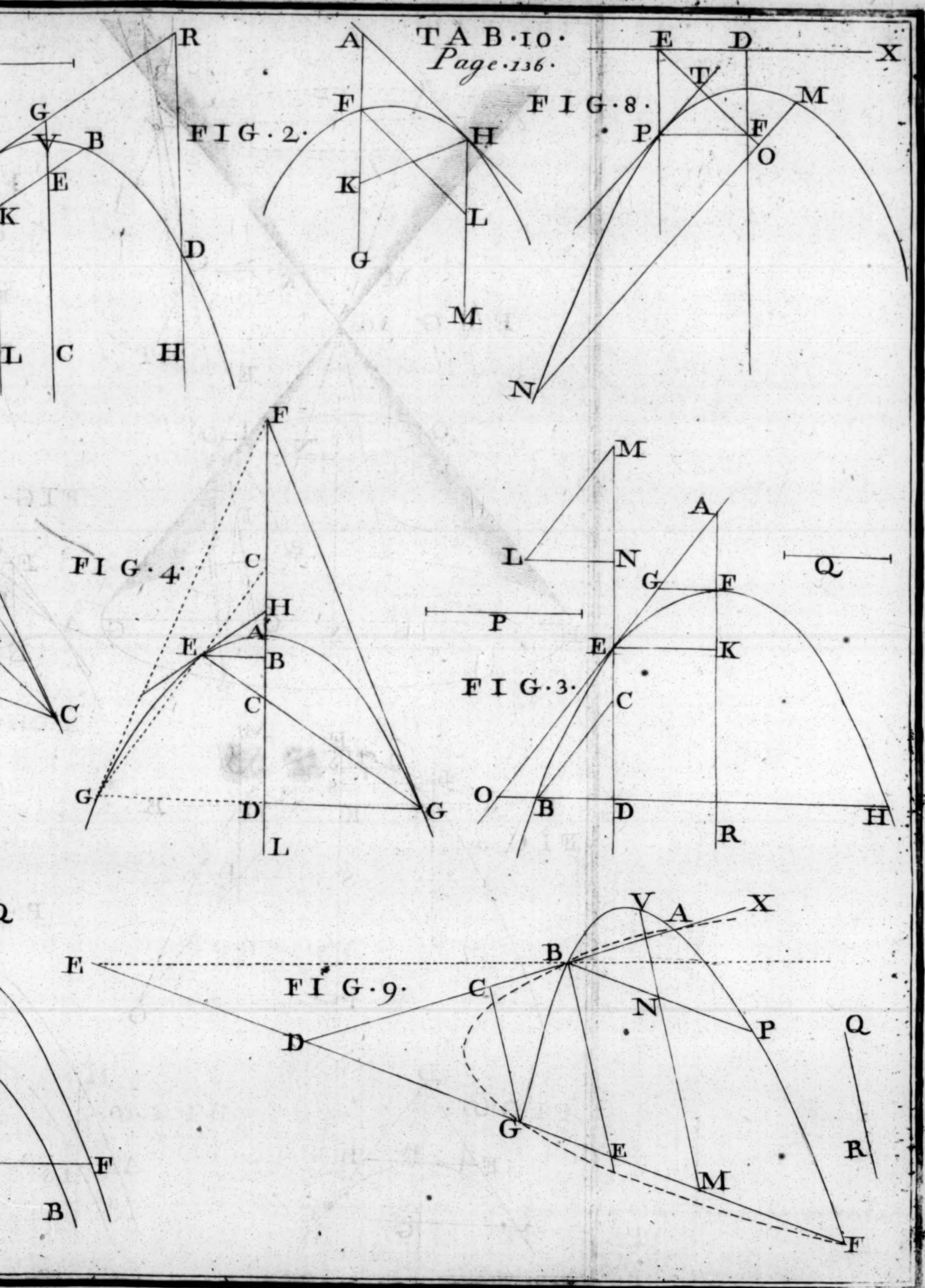


FIG. 10.

TAB·10·
Page·136·



NAM ſit primo figura inſcripta triangulum BOC, erit figura circumſcripta trapezium BHZC, et area extra eam erit triangulum HAZ; et quoniam GO eſt diameter, tranſibit per punctum A, (Cor. 1. 26. lib. 1.) et propter GO, OA æquales (47. lib. 1.) erit BC dupla ipſius HZ, ergo triangulum BOC eſt duplum trianguli HAZ; ſi tum biſecetur BG in E, diameter EM bifariam ſecabit ipſam BO, et proinde tranſibit per H; ergo propter æquales FM, MH, erit triangulum BMO duplum trianguli KHI, ſed BMO additur figuræ priori inſcriptæ, & KHI additur areæ quæ eſt extra circumſcriptam figuram, et ſimiliter ſi deinceps augeatur numerus laterum in figuris inſcriptis & circumſcriptis, quicquid additur areæ extra figuram circumſcriptam, ejus duplum ſemper additur figuræ inſcriptæ, & proinde figura inſcripta eſt ſemper dupla areæ quæ eſt extra circumſcriptam figuram. *Q. E. D.*

Cor. I. Hinc, patet quod ſegmento Parabolico BOQC nulla figura inſcribi poteſt (ut in propoſitione) quæ erit dupla areæ BACO extra ſegmentum Parabolicum & intra triangulum BAC.

Cor. II. Patet etiam, quod ſegmento Parabolico BOQC nulla figura circumſcribi poteſt (ut in propoſitione) ita ut area extra eam & intra triangulum, ſit dimidium ſegmenti Parabolici BOQC.

PROP. XII.

Iiſdem manentibus, ſegmento Parabolico BOQC, Parabolâ et rectâ terminato, inſcribi poteſt (ut in Propoſitione præcedente) figura, quæ ab eo deficiat ſpatio minore quovis dato ſpatio. Vel huic ſegmento circumſcribi poteſt figura (ut in Propoſitione præcedente) quæ ab area BACO, ex- Fig. 11.

 tra

tra ſegmentum & intra triangulum BAC, auferat ſpatium quovis dato ſpatio minus.

Pars 1. SEGMENTO inſcribatur triangulum BOC, ut in Prop. præc. cum hoc ſit dimidium totius trianguli BAC erit plus quam dimidium ſegmenti Parabolici BOQC, & ſimiliter ſi reliquis ſegmentis inſcribantur triangula BMO, CQO, hæc auferent plus quam dimidia horum ſegmentorum & ſi in reliquis ſegmentis id ſemper fiat, idem continget; quare figura inſcripta tandem deficiet a ſegmento Parabolico ſpatio quovis dato ſpatio minore (1. 10.)

Pars 2. In area BACO inſcribatur triangulum HAZ cujus baſis HZ ſit parallela jungenti contactus BC, & quoniam æquales ſunt GO, OA, erunt etiam BH, HA ut & CZ, ZA æquales: ergo triangulum HAZ eſt dimidium triangulorum BOA, COA ſimul, & proinde eſt plus quam dimidium areæ BACO, & ſimiliter, ſi reliquis ſegmentis BHOM, CZOQ, inſcribantur triangula KHI, RZP, hæc auferent plus quam dimidia horum ſegmentorum, & ſi id ſemper fiat, idem continget; quare figura circumſcripta tandem auferet ab area BACO ſpatium quovis dato ſpatio minus.

PROP. XIII.

FIG. 11. Sit BOQC ſpatium Parabolâ & rectâ BC terminatum, ducatur recta Parabolam contingens in O parallela ipſi BC, & occurrens in X & T diametris ductis per puncta B & C; erit ſegmentum Parabolicum BOQC ad parallelogrammum circumſcriptum BXTC, ut 2. ad 3.

DUCANTUR enim contingentes BA, CA, & per ipſarum occurſum A ducatur diameter AG, quæ tranſibit per contactum O, & biſecabit ipſam BC in G; tum propter AG duplam ipſius AO, erit

erit triangulum BAC æquale parallelogrammo BXTC; eſt autem ſegmentum Parabolicum BOQC duplum areæ BACO, ſi enim excederet duplum iſtius areæ, quovis ſpatio S, tum per partem primam præcedentis, ſegmento BOQC inſcribi poteſt figura quæ deficiat ab hoc ſegmento ſpatio ipſo S minore, ergo erit hæcce figura major quam duplum areæ BACO contra Cor. 1. Prop. 11. ergo ſegmentum BOQC non excedit duplum areæ BACO. Nec vero a duplo hujuſce areæ deficiet; ſi enim area BACO dimidium ſegmenti BOQC excederet, ſpatio quovis S, tum per partem 2. Prop. præc. circumſcribi poteſt huic ſegmento figura, quæ auferat ab area BACO ſpatium quod ſit minus ſpatio S; ergo area extra hanc figuram & intra triangulum BAC excederet dimidium ſegmenti BOQC contra Cor. 2. Prop. 11. cum igitur ſegmentum BOQC nec excedit duplum areæ BACO, nec ab eo deficit, erit duplum iſtius areæ et proinde eſt ad totum triangulum BAC, hoc eſt, ad parallelogrammum BXTC, ut 2. ad 3. *Q. E. D.*

Cor. 1. Duo ſegmenta LDP, AKE ejuſdem Parabolæ ſunt inter ſe in *Seſquiplicata* ratione abſciſſarum DM, KT diametrorum, quæ rectas LP, AE biſecant. Ducantur enim a punctis L & A in Parabola rectæ LR, AH perpendiculares ad diametros DM, KT, erunt hæ altitudines parallelogrammorum LNDM, ABKT; ergo LNDM eſt ad ABKT in ratione compoſita ex ratione ipſius DM ad KT & LR ad HA, ſed quadratum ex LR eſt ad quadratum ex HA, ut DM ad KT (per Cor. 1. 3. huj.) eſt igitur LR ad HA in *Subduplicata* ratione ipſius DM ad KT, & proinde LNDM & ABKT ſunt in *Seſquiplicata* ratione ipſarum DM & KT, ergo tota parallelogramma ſegmentis circumſcripta ſunt in eadem ratione: ſed ſegmenta Parabolica LDP & AKE ſunt ut iſta parallelogramma, per Propoſitionem, unde conſtat Corollarium. Fig. 12.

Cor. 2. Hinc, si LDP, AKE, fuerint segmenta diversarum Parabolarum, essent inter se, in ratione composita ex *Sesquiplicata* ratione abscissarum DM, KT & *Subduplicata* ratione parametrorum principalium; nam perpendiculares LR, AH, sunt in hoc casu in ratione composita ex *Subduplicata* ratione abscissarum DM, KT, & *Subduplicata* ratione parametrorum principalium, ut patet ex Cor. 1. 3. hujus.

SECTI-

SECTIONUM

CONICARUM

LIBER QUARTUS.

De Ellipsi & Hyperbola.

PROPOSITIO I.

Si per vertices duarum diametrorum conjugatarum, ducantur quatuor rectæ contingentes Ellipsim aut Hyperbolas conjugatas; parallelogrammum iis contentum erit æquale rectangulo quod sub axibus continetur.

SIT C centrum Ellipseos aut Hyperbolæ cujus axes sunt AB, M*m*, & sint duæ quævis diametri conjugatæ ED, FG; contingentes per ipsarum vertices ductæ conficient parallelogrammum per Cor. 27. lib. 1. occurrant contingentes ductæ per F & D sibi invicem in H, erit FCDH quarta pars totius parallelogrammi; a centro ducatur CK perpendicularis ad contingentem FH. Fig. 1, 2.

Quoniam

Quoniam per Cor. 1. 31. lib. 2. perpendicularis CK est ad CA semiaxem transversum, ut CM semiaxis secundus ad CD semidiametrum contingenti FH parallelam, erit rectangulum CK in CD, hoc est, parallelogrammum FCDH æquale rectangulo quod semiaxibus CA & CM continetur; unde liquet propositum.

Cor. Manifestum est, parallelogrammum Ellipsi aut Hyperbolis conjugatis inscriptum, jungendo vertices duarum diametrorum conjugatarum, esse dimidium parallelogrammi his conjugatis circumscripti, & proinde omnia hujusmodi parallelogramma esse inter se æqualia.

PROP. II.

Fig. 3. Si a verticibus duarum diametrorum conjugatarum CF, CG Ellipseos, ducantur ad tertiam diametrum AB ordinatim applicatæ FE, GH; erit quadratum ex intercepta inter alterutram ductarum et centrum, æquale rectangulo contento segmentis inter reliquam ductam & vertices diametri ad quam ordinatæ ducuntur.

DUCATUR enim per verticem alterutrius diametri CF recta contingens Ellipsim & occurrens diametro AB in D, ejusque conjugatæ M*m* in O, propter parallelas FD, CG & FE, GH erunt triangula FED, GHC æquiangula, & propter parallelas CO, FE, erunt rectangula OFD, CED similia; est igitur OFD ad CED ut quadratum ex FD ad quadratum ex ED; sive (ob æquiangula triangula) ut quadratum ex CG ad quadratum ex CH; sed rectangulum OFD est æquale quadrato ex CG, (51. lib. 1.) ergo quadratum ex CH est æquale rectangulo CED, hoc est, rectangulo AEB (Cor. 1. 49. lib. 1.) contento segmentis diametri AB inter reliquam ductam FE & vertices ejus. Et ablatis hisce æqualibus a quadrato ex CB, erunt reliqua,

reliqua, sciz. (5. 2.) rectangulum AHB & quadratum ex CE, æqualia. *Q. E. D.*

Cor. Manifestum est, quadrata ex segmentis diametri AB, ad quam ordinatæ ducuntur, inter ordinatas sciz. & centrum, esse simul æqualia quadrato ex semidiametro CB: nam cum quadratam ex CH sit æquale rectangulo AEB, erit quadratum ex CH simul cum quadrato ex CE æquale quadrato ex CB, per 5. 2.

PROP. III.

Summa quadratorum ex duabus quibusvis diametris conjugatis Ellipseos, æqualis est summæ quadratorum ex axibus.

SINT enim CB, CM semiaxes Ellipseos & CF, CG duæ semidiametri conjugatæ, sintque EF, GH perpendiculares ipsi CB; FL vero & GN perpendiculares ipsi CM. Fig. 3.

Quoniam per Cor. præced. quadratum ex CB æquale est quadratis CE, CH simul, & quadratum ex CM æquale quadratis ex CL, CN, hoc est, ex ipsis FE, GH; erunt quadrata ex CB, CM simul, æqualia quatuor quadratis ex CE, CH, FE, GH, quibus etiam quadrata ex CF, CG sunt æqualia (47. 1.) ergo quadrata ex CF, CG sunt æqualia quadratis ex CB, CM simul, igitur quadrata ex ipsis diametris sunt æqualia quadratis ex axibus *Q. E. D.*

PROP.

PROP. IV.

Si anguli contenti asymptotis Hyperbolæ sint recti; duæ quævis diametri conjugatæ erunt inter se æquales. Si vero anguli asymptotis contenti non sint recti; duæ quævis diametri conjugatæ erunt inæquales, & differentia inter ipsarum quadrata erit æqualis differentiæ inter quadrata duarum quarumvis aliarum diametrorum conjugatarum.

Fig. 4. *Pars* 1. SINT AD, AE asymptoti Hyperbolæ cujus centrum est A, et a centro ducatur semidiameter quævis AB, & per verticem ejus B ducatur contingens asymptotis occurrens in punctis D, K, erit BD vel BK æqualis semidiametro ipsi AB conjugatæ (38. lib. 1.) igitur si foret angulus DAK rectus, circulus centro B & diametro DK descriptus transiret per punctum A (Conversf. 31. 1.) ideoque semidiameter AB æqualis esset ipsi BD vel BK, hoc est, semidiametro ipsi conjugatæ.

In hoc casu Hyperbola dicitur *Æquilatera*.

Pars 2. Sint AD, AE asymptoti Hyperbolæ angulum acutum continentes, & ductis semidiametro AB & contingente DBK ut prius; quoniam angulus DAE est acutus cadet extra semicirculum circa DBK descriptum (Conversf. 31. 1.) ideoque erit semidiameter transversa AB major ipsâ BD vel BK. Ducatur nunc quævis alia semidiameter AC & per verticem ejus C ducatur contingens asymptotis occurrens in punctis F, E, ostendendum est quod differentia inter quadrata ex ipsis AB, BD æqualis est differentiæ inter quadrata ex ipsis AC, CF: a punctis B, K, C, E ducantur ad asymptoton DA perpendiculares BG, KL, CH & EM, propter æquales DB, BK, erunt DG, GL æquales, & propter FC, CE æquales, erunt FH, HM æquales, & propter perpendicularem BG, erit differentia inter quadrata ex AB & BD æqualis differentiæ inter quadrata ex

GA

GA & GD sive GL hoc est, rectangulo DAL (6. 2.) & similiter erit differentia inter quadrata ex AC et CF æqualis differentiæ inter quadrata ex HA & HF sive HM, hoc est, rectangulo FAM; quoniam vero triangula DAK, FAE sunt æqualia (Cor. 2. 45. lib. 1.) latera circa angulum communem erunt reciproca, hoc est, DA erit ad FA, (ut AE ad AK hoc est propter parallelas) ut AM ad AL, ergo rectangulum DAL æquale est rectangulo FAM; ideoque differentia inter quadrata ex AB, BD æqualis est differentiæ inter quadrata ex AC, CF. Patet quod in Hyperbola ipsi BCN conjugata, diameter quævis transversa minor est diametro ei conjugatâ. *Q. E. D.*

Si angulus asymptotis contentus sit semirectus, erit excessus quadratorum ex duabus diametris conjugatis duplum parallelogrammi circa ipsas descripti; & si Hyperbolæ axes & ipsarum differentia sint proportionales, erit iste excessus isti parallelogrammo æqualis.

PROP. V.

Duæ diametri Ellipseos, quæ bifariam secant rectas jungentes vertices axium, sunt diametri conjugatæ & inter se æquales: & contra; si diametri conjugatæ Ellipseos sint inter se æquales, bifariam secabunt rectas jungentes vertices axium.

Pars. 1. SIT Ellipsis, cujus axes sunt AB, M*m*, jungantur AM, BM, & ducantur diametri ED, FG, quæ has jungentes bifariam secant, occurrat FG ipsi BM in I, & propter MI, IB & etiam AC, CB æquales, erit diameter GF parallela ipsi AM, quæ ab ipsa ED bifariam secatur; sunt igitur ED, FG diametri conjugatæ (27. lib. 1.) & propter angulum MCB rectum, FIG. 5.

& IB, IM æquales, centrum circuli circa triangulum MCB descripti erit in puncto I; ergo erit IC æqualis ipsi IB, & proinde angulus ICB æqualis est angulo IBC, hoc est, angulo alterno BCD; æquales sunt igitur diametri ED, FG, per Cor. 3. Prop. 8. lib. 2.

Pars. 2. Si duæ diametri conjugatæ Ellipseos ED, FG sint inter se æquales, & a puncto B termino unius axis ducatur recta parallela alterutri conjugatarum, puta ED, transibit per terminum alterius axis. Nam occurrat hæc recta Ellipsi iterum in M, & diametro FG in I, erit BM bifariam secta in I, (Cor. 27. lib. 1.) jungatur CM, & quoniam æquales sunt diametri ED, FG, erit angulus ICB æqualis angulo BCD (Cor. 3. 8. lib. 2.) hoc est angulo alterno IBC, & proinde recta IC æqualis est ipsi IB, vel IM; ergo describi potest circulus centro I transiens per puncta B, C, M, erit igitur angulus MCB in semicirculo rectus; ergo cum AB sit axis, erit MC*m* alter axis: ergo æquales conjugatæ ED, FG bifariam secant rectas jungentes vertices axium.

Q. E. D.

Cor. I. Hinc, patet esse tantum unum par diametrorum conjugatarum Ellipseos inter se æqualium.

Cor. II. Hinc etiam, si a vertice unius axis M, ducantur ad vertices alterius axis rectæ MA, MB, erit angulus qui iisdem comprehenditur æqualis angulo ECF ei opposito, qui comprehenditur diametris æqualibus conjugatis.

PROP.

PROP. VI.

Quadratum ex ſumma æqualium diametrorum conjugatarum Ellipſeos, eſt æquale quadrato ex ſumma duarum quarumvis conjugatarum una cum quadrato ex ipſarum differentia.

SINT rectæ GC, CF diametri conjugatæ æquales Ellipſeos, & AB, BD diametri quævis conjugatæ inæquales, & ſit AE ipſarum differentia; erit quadratum ex GF æquale quadrato ex AD ſimul cum quadrato ex AE. Fig. 6.

Nam quadrata ex GC, CF bis ſumpta ſunt æqualia quadratis ex AB, BD bis ſumptis (per 3. huj.) ſed quadrata ex GC, CF bis ſumpta ſunt æqualia quadrato ex GF (4. 2.) & quadrata ex AB, BD bis ſumpta ſunt æqualia quadrato ex AD, una cum quadrato ex AE: nam quadrata ex AB & BE (ſive BD) ſemel ſumpta æquantur rectangulo (ABE bis ſive) ABD bis, una cum quadrato ex AE (7. 2.) ergo quadrata ex AB, & BD bis ſumpta æquantur rectangulo ABD bis & quadratis ex AB, BD, & AE, hoc eſt, quadrato ex AD (4. 2.) una cum quadrato ex AE: ergo liquet propoſitum.

Cor. Hinc, patet quod ſumma æqualium conjugatarum eſt major, & ſumma axium minor, ſummâ aliarum quarumvis conjugatarum; eſt enim differentia inter axes major quam differentia inter duas alias conjugatas, ut patet ex Prop. 8. lib. 2.

PROP. VII.

Angulus obtusus, quem comprehendunt æquales conjugatæ diametri Ellipseos, est maximus, & angulus acutus est minimus, angulorum omnium qui duabus conjugatis comprehendi possunt.

Fig. 7. SIT AB axis transversus Ellipseos & M*m* axis ejus secundus; junctis AM, MB, erit angulus AMB æqualis angulo obtuso qui æqualibus conjugatis comprehenditur. (Cor. 2. 5. huj.) Sint CR, CT duæ quævis conjugatæ diametri inæquales, & a vertice axis transversi A ducatur AR ipsi CR ordinatim applicata & occurrens Ellipsi in D, erit parallela ipsi CT, jungatur DB occurrens ipsi CT in T, & propter AC, CB & AR, RD æquales, erunt CR, TD parallelæ; ergo angulus ADB æqualis est angulo RCT; patet vero angulos AMB, ADB obtusos esse, utpote intra semicirculum circa AB descriptum, (ut constat ex Prop. 8. lib. 2.) si per puncta A, M, B describatur circulus, segmentum ejus AMB erit totum intra Ellipsim; nam recta BK contingens circulum in B & versus M producta continet angulum acutum KBA cum axe AB (quia segmentum alternum BEA est semicirculo majus) ergo hæc recta & proinde arcus BM cadit intra Ellipsim, et si Ellipsi occurreret inter B & M & ab occursu ducatur recta axi Ellipseos M*m* ordinatim applicata, terminus ejus alter esset etiam in peripheria circuli AMB, & ergo Ellipsis & circulus in quinque punctis occurrerent, contra Cor. 3. 56. lib. 1. est igitur segmentum circuli AMB totum intra Ellipsim. Ergo angulus AMB hoc segmento contentus major est angulo ADB, extra idem segmentum: unde constat propositum.

PROP.

PROP. VIII. PROBL I.

Datis positione & magnitudine duabus diametris conjugatis Ellipseos aut Hyperbolæ; invenire duas alias conjugatas quæ datos angulos comprehendant.

Si anguli dati sint recti, diametri inveniendæ sunt axes, & Problema solutum est Propositione 7. lib. 2.

Cas. 1. QUANDO diametri datæ sunt axes, sit AB axis major, et M*m* axis minor Ellipseos aut Hyperbolæ, et sint dati anguli VZX, VZY; circa axem majorem AB describatur circulus AFBG, cujus segmenta AFB, AGB capiant angulos æquales angulis datis VZX, VZY, sit FG diameter hujusce circuli cum axe M*m* coincidens, et centrum ejus P. FIG. 7, 8.

Si angulus obtusus datus VZX sit æqualis angulo qui comprehenditur junctis AM, BM, in Ellipsi; circuli segmentum AFB occurret axi M*m* in vertice ejus M, in quo casu diametri quæsitæ erunt diametri æquales conjugatæ per Cor. 2. Prop. 5. et si angulus datus VZX major fuerit angulo AMB, Problema erit impossibile per præcedentem. Si vero angulus datus VZX minor sit ipso AMB, circuli segmentum AFB occurret axi M*m* producto in F; tum a puncto F ducatur recta ipsi MB parallela, occurret circulo alicubi inter F et B, puta in S, ducatur a puncto S recta ipsi BC parallela, occurret ipsi CM in O quod erit inter F et centrum Ellipseos C; quoniam (propter circulum) erunt GO, OS, OF, proportionales, erit GO ad OF, ut quadratum ex OS ad quadratum ex OF, hoc est (ob sim. trian. OSF, CBM) ut quadratum ex CB ad quadratum ex CM; similiter in Hyperbola sumatur punctum O in diametro FG producta ita ut GO sit ad FO, ut quadratum ex CB ad quadratum ex CM, et in utraque sectione describatur circulus,

circulus, centro P et intervallo PO, occurrens axi AB in duobus punctis quorum unum ſit Q, ducatur per Q diameter circuli AFBG ipſi occurrens in punctis D, N, horum punctorum D quod eſt ipſi Q propius erit in Ellipſi aut Hyperbola cujus axis tranſverſus eſt AB et axis conjugatus M*m*. Nam a puncto D ducatur recta ipſi AB perpendicularis, ei occurrens in H et circulo rurſus in L, jungatur LN et propter angulum DLN in ſemicirculo rectum, erunt LN, HQ parallelæ; eſt autem rectangulum LHD ad quadratum ex DH, ut LH ad HD, ſive ut NQ ad QD, hoc eſt per conſtructionem, ut GO ad OF ſive ut quadratum ex CB ad quadratum ex CM, eſt igitur rectangulum LHD ſive (propter circulum) AHB ad quadratum ex DH, ut quadratum ex AB ad quadratum ex M*m*: ergo punctum D eſt in Ellipſi aut in Hyperbola, cujus axis tranſverſus eſt AB et axis conjugatus M*m*, per Cor. Prop. 34, & 35. lib. 1.

Inflectantur igitur ad punctum D rectæ AD, BD, et a centro ſectionis ducantur CR, CT has rectas bifariam ſecantes, erunt hæ diametri quæſitæ. Nam propter AR, RD et etiam AC, CB æquales, erit CR parallela ipſi BD, et ſimiliter erit CT parallela ipſi AD; ergo CR, CT ſunt diametri conjugatæ (27. lib. 1.) et comprehendunt angulum RCT æqualem angulo ADB, et proinde comprehendunt angulos (æquales iis qui continentur circuli ſegmentis AFB, AGB, hoc eſt) æquales angulis datis VZX, VZY. Quoniam circulus intervallo PO deſcriptus occurrit axi AB in alio puncto præter Q, patet quod eodem modo inveniri poſſunt duæ aliæ diametri conjugatæ, quæ angulos comprehendent æquales angulis datis VZX, VZY. *Q. E. I.*

Si circulus AFBG deſcriptus fuiſſet circa axem minorem, tum inventâ diametro DQN ut prius, punctum N ab ipſo Q remotius eſſet in Ellipſi vel in Hyperbola, ut patet.

Cum

Cum axes Hyperbolæ sunt æquales; circa alterutrum axem describatur segmentum circuli AFB capiens angulos datos VZX VZY ut prius; & ducatur recta DH axi AB perpendicularis ei occurrens in H & circulum contingens in D, & quoniam quadratum ex DH est æquale rectangulo AHB, erit punctum D in Hyperbola, & junctis AD, BD, diametri CR, CT quæ bisariam secant jungentes erunt diametri quæsitæ ut prius.

Cas. 2. Quando diametri datæ non sunt axes. Quoniam per Prop. 7. lib. 2. axes inveniri possunt positione & magnitudine ex datis duabus conjugatis, hic casus ad casum præcedentem reducitur, et cum diametri quæsitæ inveniuntur positione, ipsarum vertices inveniri possunt eodem modo, quo vertices axium inventæ fuerunt in Prop. 7. lib. 2.

Vel hoc Problema generaliter solvi potest quæcunque sint diametri conjugatæ datæ, sciz. describendo circa unam ex diametris datis circulum, cujus segmenta capiant angulos datos, et inveniendo ejus intersectionem cum Ellipsi, vel cum Hyperbola circa cujus diametrum transversum describitur; quod fieri licet methodo haud dissimili ei quâ inventa fuit intersectio Ellipseos aut Hyperbolæ cum circulo circa axem ejus descripto in primo casu hujus.

PROP. IX. PROBL. II.

Datis positione & magnitudine duabus diametris conjugatis Ellipseos aut Hyperbolæ, & rectâ positione datâ; invenire puncta in quibus hæc recta sectioni occurret.

SINT AB, M*m* diametri datæ & C centrum Ellipsis aut Hyperbolæ. Fig. 9. 10.

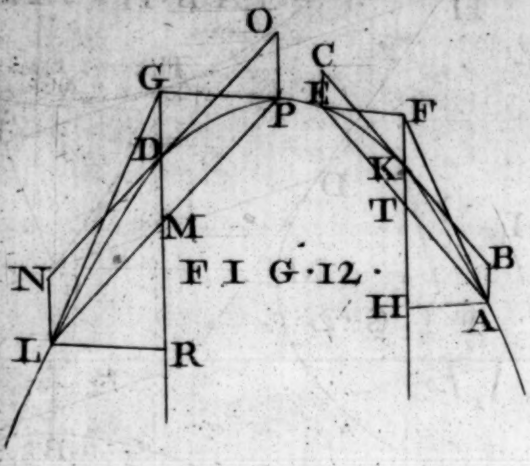
Cas. 1. Primo, si recta positione data sit parallela uni ex diametris conjugatis & occurrat alteri inter vertices ejus cum sectio sit

ſit Ellipſis, vel cum ſit Hyperbola ſi occurrat diametro ejus tranſverſæ productæ; quoniam erit recta ordinatim applicata huic diametro, puncta in quibus ſectioni occurret inveniri poſſunt per Cor. Prop. 34. & 35. lib. 1. & ſi occurrat diametro ſecundæ Hyperbolæ, puncta in quibus occurret Hyperbolis oppoſitis inveniri poſſunt per Prop. 32. lib. 1.

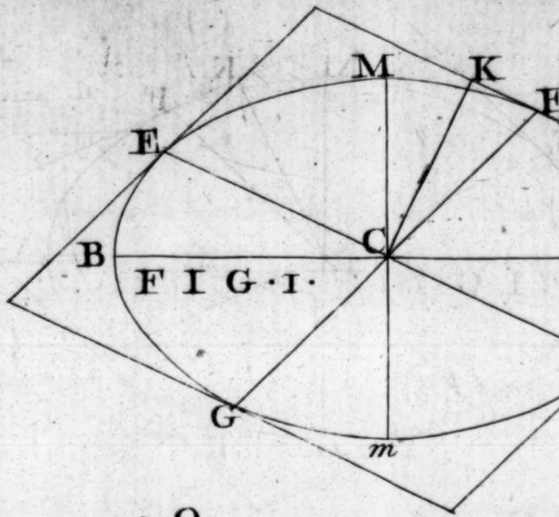
Caſ. 2. Si vero poſitione detur recta PQ non parallela alterutri diametrorum AB vel M*m*. Ducatur per verticem diametri AB recta AT alteri diametro M*m* parallela, hæc ſectionem continget (Cor. 27. lib. 1.) a centro ducatur diameter ipſi PQ parallela & occurrens AT in H, & in eadem AT ſumatur ſegmentum AK (verſus punctum H in Hyperbola, ad partes autem contrarias in Ellipſi) ita ut rectangulum KAH ſit æquale quadrato ex CM, & jungatur CK, erunt CH, CK diametri conjugatæ (Cor. Prop. 51. lib. 1.) ducatur ergo AE ad diametrum CK, & ipſi CH parallela, erit ipſi CK ordinatim applicata. Sint igitur CE, CF, CK proportionales & erit F vertex diametri, quæ in recta CK jacet. Eodem modo inveniuntur vertices diametri, quæ jacet in recta CH: ergo hic caſus reducitur ad caſum primum. Si vero in utrovis caſu recta PQ tranſeat per verticem unius diametri conjugatæ, & ſit parallela alteri, ſectionem continget, ut patet.

Cor. Hinc, ex datis poſitione & magnitudine duabus diametris conjugatis, patet methodus ducendi rectam quæ ſectionem contingat, & ſit parallela rectæ poſitione datæ.

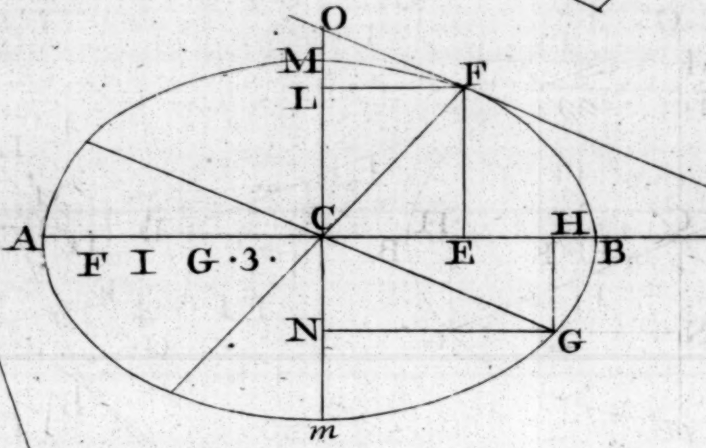
PROP.



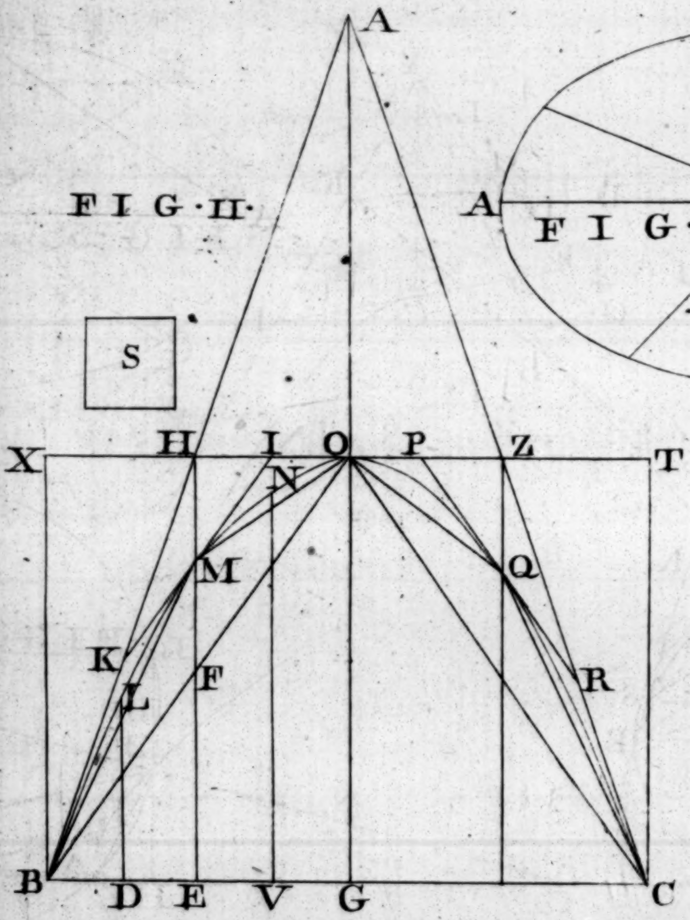
FIG·12·



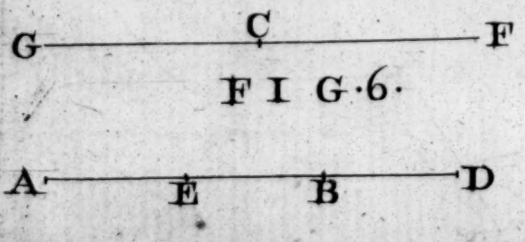
FIG·1·



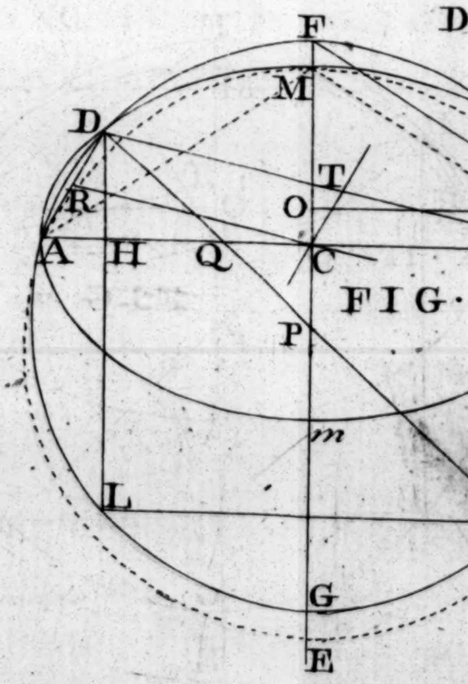
FIG·3·



FIG·11·

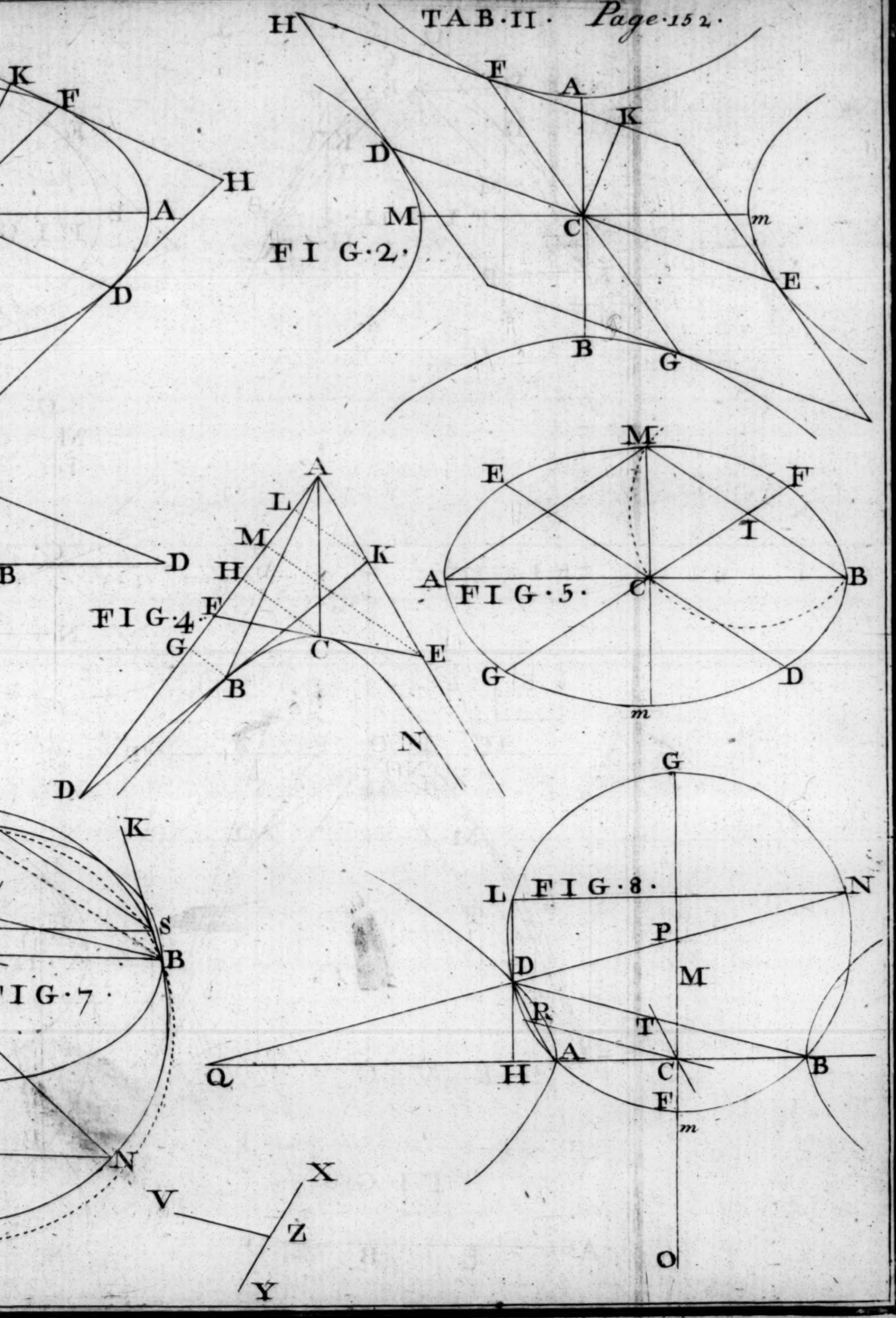


FIG·6·



FIG·

TAB·II· *Page·152·*



7 AP 53

PROP. X. PROBL. III.

Circa datum parallelogrammum EFGH describere Ellipsim aut Hyperbolas oppositas, ita ut diameter sectionis rectis EH, FG parallela, sit ad ipsius conjugatam in data ratione sciz. ut TS ad TQ. Fig. 11, 12.

DUCANTUR recta AB bifariam secans ipsas EH, FG, & M*m* bifariam secans ipsas EF, HG; erit AB parallela rectis EF, HG, & M*m* rectis EH, FG; manifestum est quod intersectio harum rectarum C erit centrum sectionis describendæ, & quod diametri jacentes in rectis AB, M*m* erunt diametri conjugatæ; occurrat recta AB ipsi EH in K & recta M*m* ipsi EF in D & ipsi HG in V.

Cas. 1. Sit primum sectio describenda Ellipsis, & ut TS ad TQ ita sit EK ad rectam KL, & sit KL perpendicularis ad AB, centro C & intervallo CL describatur circulus occurrens ipsi AB in punctis A, B; et ut TS ad TQ ita sit CM vel C*m* ad CA; Ellipsis cujus diametri conjugatæ sunt M*m*, AB erit Ellipsis describenda. Nam per constructionem, est quadratum ex CM ad quadratum ex CA, ut quadratum ex TS ad quadratum ex TQ et in eadem ratione est quadratum ex EK (ad quadratum ex KL sive propter circulum) ad rectangulum BKA, & recta EK est parallela ipsi CM, ergo erit punctum E in Ellipsi (Cor. 34. lib. 1.) et quoniam EK, KH sunt æquales erit H in Ellipsi, & similiter, quia ED, DF & HV, VG sunt æquales erunt puncta F & G in Ellipsi. Fig. 11.

Cas. 2. Sint nunc Hyperbolæ oppositæ per puncta E, F, G, H describendæ, in hoc casu oportet rectas TS, TQ non esse inter se, ut EK, CK; sit igitur EK ad KC in ratione minore eâ quam habet TS ad TQ, et sit EK ad rectam KL, ut TS ad TQ, erit KL minor ipsâ KC, describatur semicirculus super ipsam CK et huic inscribatur recta KL, jungatur CL et sumatur CA Fig. 12.

U vel

vel CB æqualis ipſi CL, et ut TS ad TQ, ita ſit CM vel C*m* ad CA.

Hyperbolæ oppoſitæ, quarum AB ſit diameter tranſverſa, & M*m* diameter ei conjugata, erunt Hyperbolæ deſcribendæ; nam per conſtructionem eſt quadratum ex CM ad quadratum ex CA, ut quadratum ex TS ad quadratum ex TQ; ſive ut quadratum ex EK (ad quadrum ex KL, ſciz. differentiam inter quadrata ex CA et CK, hoc eſt) ad rectangulum BKA (6. 2.) ſed recta EK eſt parallela ipſi CM, ergo erit punctum E in una ex Hyperbolis oppoſitis (Cor. 35. lib. 1.) et quoniam EK, KH ſunt æquales, erit H in eadem Hyperbola, et quoniam ED, DF & HV, VG ſunt æquales, et hæ rectæ ſunt parallelæ diametro AB occurruntque ejus conjugatæ M*m* in D & V, erunt puncta F et G in Hyperbola oppoſita.

Si vero EK ſit ad KC in ratione majore eâ quam habet TS ad TQ, fiat ut quadratum ex TS ad quadratum ex TQ, ita quadratum ex EK ad ſummam quadratorum ex KC & alia quadam recta, puta CA, tum centro C & intervallo CA deſcribatur circulus occurrens rectæ CK in punctis A, B, & ut eſt TS ad TQ, ita ſit CM vel C*m* ad CA; Hyperbolæ oppoſitæ, quarum M*m* ſit diameter tranſverſa & AB diameter ei conjugata, erunt Hyperbolæ deſcribendæ; nam quadratum ex CM eſt ad quadratum ex CA, ut quadratum ex TS ad quadratum ex TQ ſive ut quadratum ex EK ad ſummam quadratorum ex CK & CA, ergo Hyperbolæ tranſibunt per puncta E, H, G, F, ut patet ex Prop. 32. lib. 1. *Q. E. F.*

Si vero TS ſit ad TQ ut EK ad KC, Problema in hoc caſu eſt impoſſibile. Nam ſi deſcribantur Hyperbolæ quarum diametri conjugatæ jacent in rectis M*m*, AB & ſint inter ſe, ut EK, KC, punctum E erit ad ipſarum aſympton.

Cor. I. Cum ex conditionibus hujuſce problematis patet, quod poſitiones & magnitudines diametrorum AB, M*m* dantur; manifeſtum

festum est, unicam Ellipsim, vel duas tantum Hyperbolas oppositas describi posse, quæ Problemati satisfacient.

Cor. II. Hinc, circa datum parallelogrammum EFGH describi possunt Ellipsis aut Hyperbolæ oppositæ, ita ut Ellipsis, vel una ex Hyperbolis, transeat per datum punctum P. Ducantur enim rectæ AB, M*m* bifariam secantes latera opposita parallelogrammi, in his rectis erunt diametri conjugatæ sectionis describendæ; per punctum P ducatur recta ipsi AB parallela, et occurrens M*m* in R, & lateri EH in O, & sit RN æqualis ipsi PR; tum si per E, F, G, H describantur Ellipsis aut Hyperbolæ oppositæ, ita ut quadratum ex diametro in recta AB sit ad quadratum ex diametro in recta M*m*, ut rectangulum PON ad rectangulum EOH, erit punctum P, in hac Ellipsi, vel in una ex Hyperbolis, ut patet.

Si sectio describenda sit Ellipsis, oportet punctum P esse inter opposita latera parallelogrammi producta. Si vero sit Hyperbola oportet P esse intra parallelogrammum vel inter latera adjacentia producta.

Cor. III. Hinc vel Ellipsis vel Hyperbolæ oppositæ describi possunt, ita ut ipsarum centrum sit punctum datum C, & diameter recta MC*m* positione data, & ut rectæ parallelæ EF, PN ab ipsa MC*m* bifariam sectæ in D et R, sint isti diametro ordinatim applicatæ. Sumatur enim in recta M*m* segmentum CV ipsi CD æquale & per V ducatur GH ipsi EF parallela et æqualis, et bifariam secta in V; jungantur HE, GF & per Cor. præcedens describantur Ellipsis aut Hyperbolæ oppositæ circa parallelogrammum EFGH, quarum una transeat per punctum P, erit hæc sectio describenda; nam erit recta M*m* diameter ejus, quia bifariam secat parallelas EF, GH Ellipsi aut Hyperbolis oppositis terminatas, & ei ordinatim applicata erit recta PN ipsis EF, GH parallela; & quia æquales ordinatæ EF, GH æqualiter a puncto C distant, erit istud punctum C centrum. Si rectæ datæ EF, PN sint æquales

et a puncto C æqualiter diſtant, quotlibet Ellipſes aut Hyperbolæ deſcribi poſſunt, quæ Problemati ſatisfacient.

Si vero hæ rectæ EF, PN æqualiter diſtant a puncto C, cum ſunt inæquales, vel inæqualiter diſtant ab eodem puncto, cum ſunt æquales, Problema eſt impoſſibile. Si recta minor EF longius diſtat a puncto C quam recta major PN, ſectio deſcribenda erit Ellipſis, ſi vero contrarium eveniat, deſcribendæ ſunt ſectiones oppoſitæ; & cum in utroque caſu patet ſectiones deſcribendas neceſſario tranſire per ſex puncta data ex conditionibus Problematis; manifeſtum eſt, quod unica Ellipſis deſcribi poteſt, vel duæ tantum Hyperbolæ oppoſitæ, quæ Problemati ſatisfacient quia duæ ſectiones conicæ vel ſectiones oppoſitæ per Cor. 3. 56. lib. 1. ſibi invicem occurrere nequeunt in quinque punctis multo minus in ſex.

Hæc Propoſitio ejuſque corollaria ut et Propp. 14. 15. hujus deſumuntur ex opera illuſt. *Marchionis de l'Hoſpital.*

PROP. XI.

Fig. 13, 14.

Ellipſi aut Hyperbolis oppoſitis poſitione datis inſcribatur parallelogrammum KLNO, ſi diameter AB bifariam ſecans latera ejus oppoſita in R & S punctis, ſemper datam habeat rationem ad ipſius ſegmentum RS inter iſta latera; erit parallelogrammum KLNO ſemper ejuſdem magnitudinis.

SIT C centrum ſectionis, erunt CR, CS æquales ut patet, ducatur diameter M*m* parallela lateribus LN, KO, erit conjugata ipſi AB; circa has conjugatas deſcribatur parallelogrammum, erit æquiangulum parallelogrammo KLNO, et proinde hæc parallelogramma ſunt inter ſe in ratione compoſita ex rationibus laterum; per hypotheſin ratio ipſius AB ad RS ſive KL datur, ergo datur ratio quadrati ex CB (ad quadratum ex CR, & igitur) ad rectangulum ARB (differentiam ſciz. inter quadrata ex CB

et

et CR) et proinde datur ratio diametri M*m* ad LN ipsi AB ordinatim applicatam; datur igitur ratio quæ ex hisce datis rationibus AB ad KL & M*m* ad LN componitur: ergo ratio inter parallelogramma æquiangula datur: sed parallelogrammum AMB*m* magnitudine datur (1. huj.) ergo parallelogrammum KLNO est semper ejusdem magnitudinis. *Q. E. D.*

PROP. XII.

Si latera parallelogrammi EFGH contingant Ellipsim aut producta contingant Hyperbolas oppositas positione datas & si diameter sectionis AB, quæ (si opus producta) transeat per angulos oppositos E & G, datam habeat rationem ad segmentum EG inter istos angulos; erit parallelogrammum EFGH semper ejusdem magnitudinis. Fig. 13, 14.

SINT puncta contactus K, L, N, O, & rectæ KN, LO, jungentes opposita puncta contactus, erunt diametri (Cor. 2. 22. lib. 1.) & quatuor rectæ hæc puncta jungentes conficient parallelogrammum KLNO; ducatur diameter AB bifariam secans parallelas LN, KO in R & S, transibit hæc per angulos E et G (Cor. 1. 26. lib. 1.) similiter diameter M*m* bifariam secans rectas KL, ON transibit per reliquos angulos F & H & erit ipsi AB conjugata. Quoniam igitur, per hypothesin, datur ratio ipsius CB ad CG, datur & ratio ipsius CB ad CR, et ergo ut in præcedente datur ratio semidiametri CM ad ordinatam LR vel ad CT ipsi LR æqualem; datur igitur ratio CM ad CF, et igitur si ducantur MP, PQ perpendiculares ad diametrum AB, dabitur ratio ipsius MP ad FQ. Datur igitur ratio, quæ ex his datis rationibus AB ad EG, & MP ad FQ componitur, hoc est, ratio rectanguli AB in MP ad rectangulum EG in FQ; sed rectangulum AB in MP magnitudine datur (1. huj.) ergo rectangulum EG in FQ.

FQ. hoc eſt parallelogrammum EFGH eſt ſemper ejuſdem magnitudinis. *Q. E. D.*

PROP. XIII.

Fig. 15, 16. Si latera parallelogrammi EFGH contingant Ellipſim, aut producta contingant Hyperbolas oppoſitas; erit hocce parallelogrammum ad parallelogrammum circa quaſvis diametros ſectionis conjugatas deſcriptum, ut unum ex ejus lateribus HG ad diametrum ſectionis quæ iſti lateri eſt parallela.

SIT AB diameter ſectionis parallela lateribus HG, EF, et ducatur diameter M*m* ipſi AB conjugata, tranſibit hæc per puncta in quibus latera HG, EF Ellipſim aut Hyperbolas oppoſitas contingant (Cor. 27. lib. 1.) circa has diametros conjugatas deſcribatur parallelogrammum KLNO, erit inter eaſdem parallelas, cum parallelogrammo EFGH, ergo EFGH eſt ad KLNO, ut HG ad (ON ſive) diametrum AB quæ ipſi HG eſt parallela; eſt autem KLNO æquale parallelogrammo circa quavis alias diametros conjugatas deſcripto; unde liquet propoſitum.

Cor. I. Ex hac propoſitione patet, quod parallelogrammum circa diametros conjugatas Ellipſeos deſcriptum, minimum eſt omnium parallelogrammorum, quæ circa eandem Ellipſim deſcribi poſſunt.

Cor. II. Jungantur AM, BM, & patet triangulum AMB maximum eſſe, quod eidem Semi-Ellipſi inſcribi poteſt; et proinde parallelogrammum Ellipſi inſcriptum jungendo vertices diametrorum conjugatarum maximum eſt quod eidem Ellipſi inſcribi poteſt; eſt igitur parallelogrammum maximum Ellipſi inſcriptum, dimidium minimi parallelogrammi eidem Ellipſi circumſcripti. Hæc omnia, quæ ſunt demonſtrata de parallelogrammis

Ellipſi

Ellipsi aut Hyperbolis inscrptis vel circumscriptis, tenent etiam de parallelogrammis circulo inscriptis vel circumscriptis.

PROP. XIV.

Si in CN asymptoto Hyperbolæ, sumantur a centro partes CK, CL quæ sint inter se in eadem ratione qua sunt duæ aliæ quævis partes CG, CH sumptæ in eadem asymptoto CN; & si ducantur rectæ GF, HD, KB, LE, parallelæ alteri asymptoto CP, occurrentes Hyperbolæ in punctis F, D, B, E, & ducantur semidiametri CF, CD, CB, CE; erunt sectores Hyperbolici CBF, CDF inter se æquales. Fig. 17.

DUCANTUR enim rectæ BD, EF asymptotis occurrentes in punctis M, O & N, P, et quoniam parallelæ sunt KB, HD, CO, erit MK ad MB, ut HC ad DO, ergo propter æquales MB, DO, erunt MK, HC æquales; et similiter propter parallelas LE, GF, CP et æquales NE, FP, erunt NL, GC æquales, est igitur MK ad NL (ut HC ad GC, hoc est per hypothesin, ut LC ad KC, sive propter Hyperbolam) ut KB ad LE; anguli autem MKB, NLE sunt æquales: ergo triangula MKB, NLE sunt similia, et proinde rectæ MB, NE, hoc est BD, EF, sunt parallelæ. Ducatur igitur semidiameter bifariam secans parallelas BD, EF in punctis A, Q, et quoniam bifariam secabit omnes rectas Hyperbolâ terminatas et ipsis BD, EF parallelas, bifariam secabit aream EBDF, ergo cum æqualia sunt triangula CQF, CQE, si ab iis auferantur æquales areæ QADF, QABE et triangula æqualia CDA, CAB, reliqua, sciz. sectores Hyperbolici CDF, CBE, erunt æqualia.

Cor. Si in asymptoto CN, partes CG, CH, CK sint continue proportionales et ducantur GF, HD, KB, ut in Propositione, et

jungatur

jungatur BF, eodem modo probari potest, quod recta BF est parallela contingenti ductæ per punctum D; & proinde quod sectores CDF, CDB sunt æquales; ideoque si quotlibet partes CG, CH, CK, CL &c. sint continue proportionales, & ducantur rectæ GF, HD, KB, LE, &c. asymptoto CP parallelæ; sectores CDF, CDB, CBE &c. erunt omnes inter se æquales.

PROP. XV.

FIG. 17. Si a verticibus semidiametrorum CD, CB, ducantur rectæ DH, BK ad asymptoton CN, & alteri asymptoto CP parallelæ; erit sector Hyperbolicus CBD æqualis trapezio Hyperbolico DHKB.

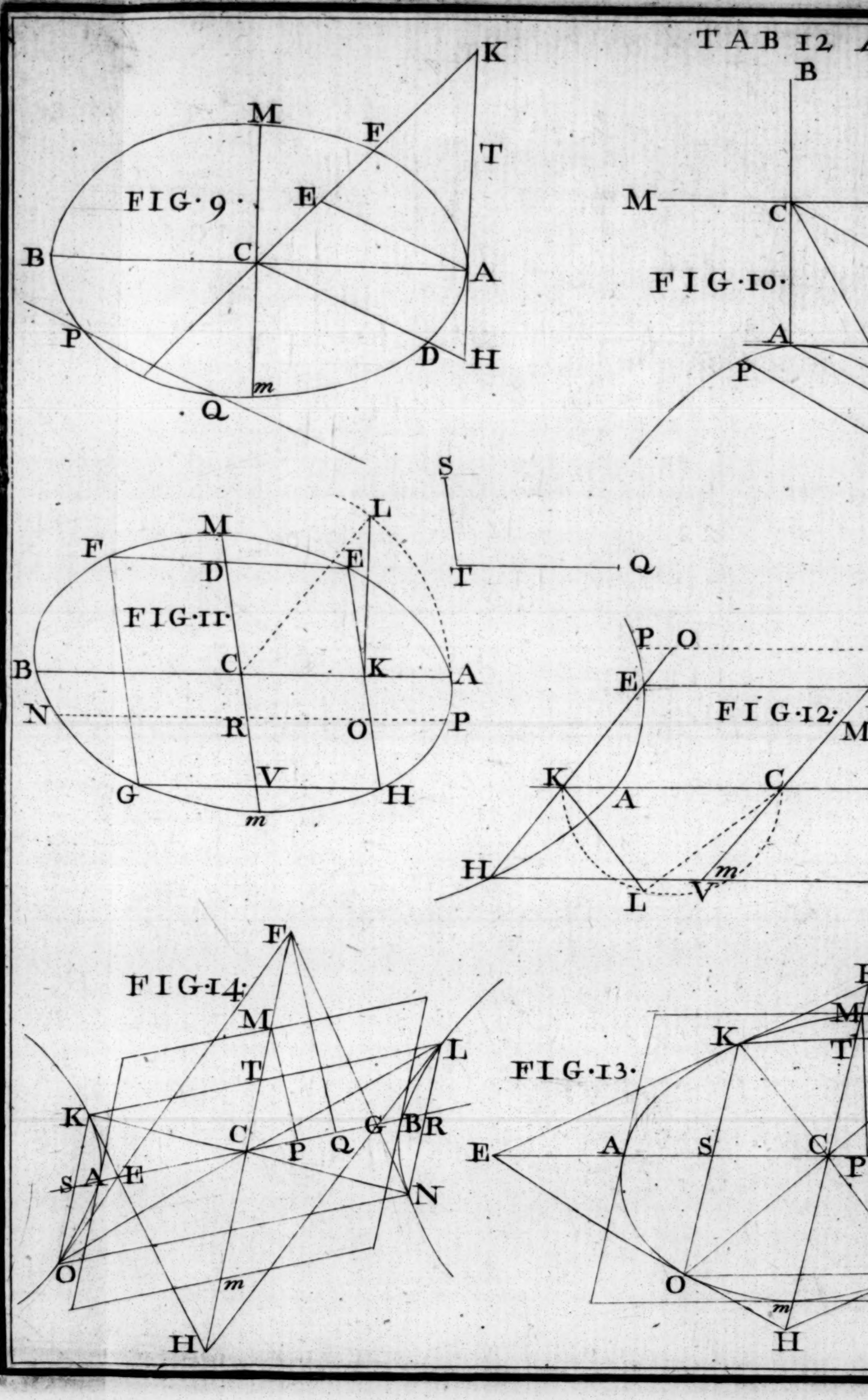
NAM triangula CHD, CKB sunt æqualia, utpote dimidia æqualium parallelogrammorum (Cor. 2. 43. lib. 1.) ergo si ab iis auferatur commune triangulum CHR, erit triangulum CDR æquale trapezio HKBR, & si his addatur spatium DBR, erit sector CBD æqualis trapezio hyperbolico DHKB.

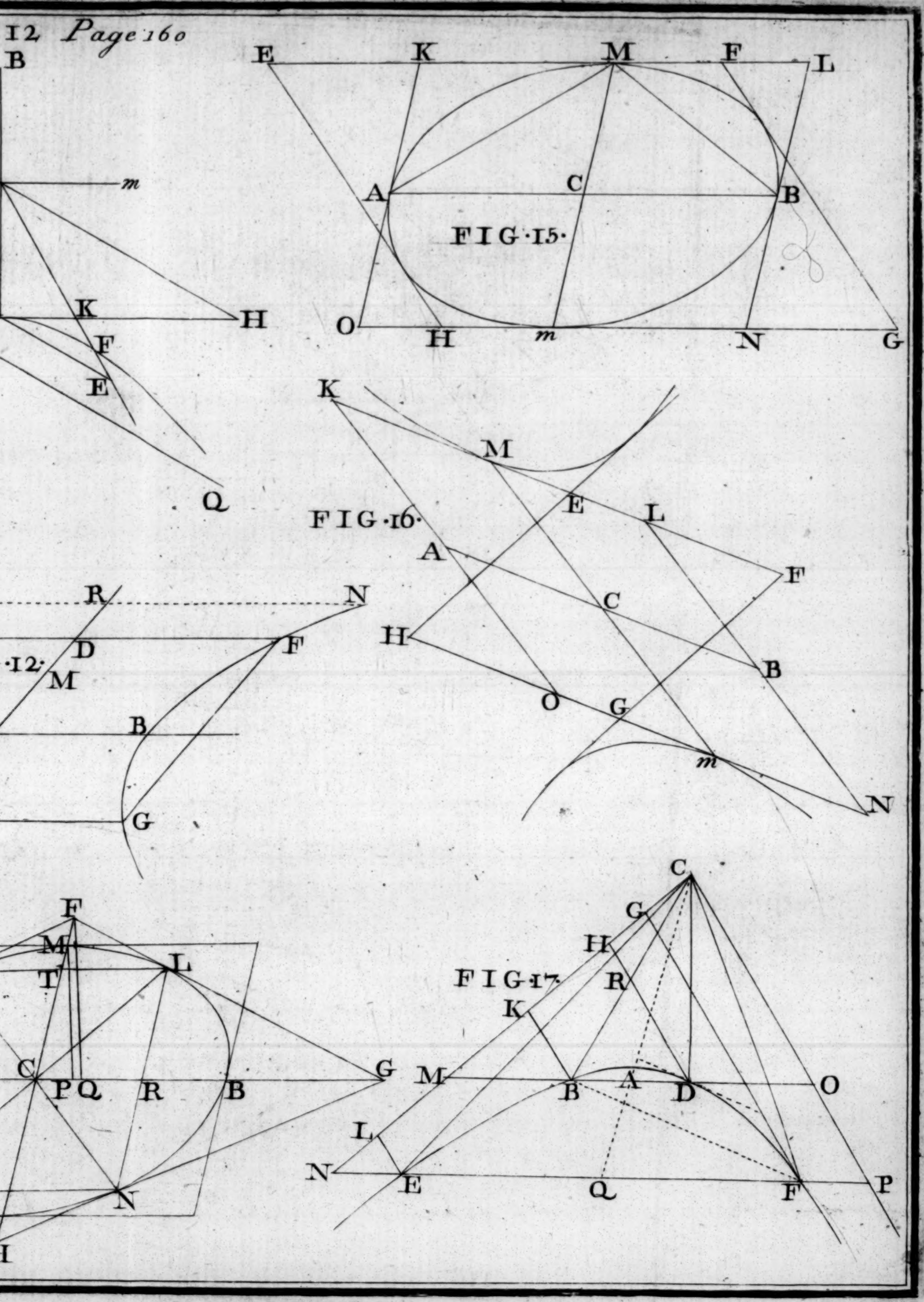
COR. Hinc & ex Corollario præcedente, si in asymptoto CN sumantur quotlibet partes CG, CH, CK, CL continue proportionales, & ducantur ad Hyperbolam rectæ GF, HD, KB, LE, &c. asymptoto CP parallelæ, trapezia Hyperbolica FGHD, DHKB, BKLE, erunt omnia inter se æqualia.

PROP. XVI. *Quæ est* V. *Archimedis de Conoid. & Sphæroid.*

Omne spatium ab Ellipsi comprehensum est ad circulum cujus diameter æqualis est axi transverso Ellipseos, ut axis secundus ad axem transversum.

Archimedis


TAB 12
FIG·9·
FIG·10·
FIG·11·
FIG·12·
FIG·13·
FIG·14·


12 Page 160
FIG·15·
FIG·16·
·12·
FIG·17

7 AP 53

Archimedis Demonstratio.

SIT enim Ellipsis cujus axis transversus est AC & axis secundus BD, & sit circulus circa diametrum AC descriptus; ostendendum est spatium Ellipsi comprehensum ad circulum eandem habere rationem, quam BD ad CA sive EF: quam vero rationem habet BD ad EF, eandem habeat circulus in quo est Z ad circulum AECF; dico quod circulus Z æqualis est Ellipsi. Si enim circulus Z non sit æqualis spatio ABCD ab Ellipsi comprehenso, sit primo, si fieri potest, major: poterit igitur in circulo Z polygonum parem habens numerum angulorum inscribi, majus ABCD spatio; intelligatur inscriptum esse, & in circulo AECF inscribatur polygonum simile ei quod in Z circulo inscriptum est; & ab ipsius angulis perpendiculares ducantur ad diametrum AC, puncta vero, in quibus perpendiculares Ellipsim secant, rectis jungantur: erit igitur polygonum quoddam in Ellipsi inscriptum, quod habebit ad polygonum in circulo AECF inscriptum, eandem rationem, quam habet BD ad ipsam EF: nam quoniam perpendiculares EH, KL in eadem ratione sectæ sunt in B et M (Cor. 2. Prop. 30. lib. 1.) manifestum est, quod trapezium LE ad ipsum LB eandem habet rationem, quam habet HE ad HB; quare et unumquodque reliquorum in circulo trapeziorum ad unumquodque in Ellipsi trapezium, eandem habet rationem quam habet EH ad ipsam BH; habent autem et triangula in circulo ad puncta A, C, ad ea quæ in Ellipsi sunt, eandem rationem; habebit igitur totum polygonum in circulo AECF inscriptum ad totum polygonum in Ellipsi inscriptum, eandem rationem quam habet EF ad ipsam BD: hanc autem rationem habet idem hoc polygonum, ad polygonum inscriptum in circulo Z, quoniam & ipsi circuli hanc habent rationem; polygonum igitur in circulo Z inscriptum æquale est, polygono Ellipsi inscripto, contra hypothesin, majus enim erat FIG. 18.

7 AP 53

Archimedis Demonstratio.

SIT enim Ellipsis cujus axis transversus est AC & axis secundus BD, & sit circulus circa diametrum AC descriptus; ostendendum est spatium Ellipsi comprehensum ad circulum eandem habere rationem, quam BD ad CA sive EF: quam vero rationem habet BD ad EF, eandem habeat circulus in quo est Z ad circulum AECF; dico quod circulus Z æqualis est Ellipsi. Si enim circulus Z non sit æqualis spatio ABCD ab Ellipsi comprehenso, sit primo, si fieri potest, major: poterit igitur in circulo Z polygonum parem habens numerum angulorum inscribi, majus ABCD spatio; intelligatur inscriptum esse, & in circulo AECF inscribatur polygonum simile ei quod in Z circulo inscriptum est; & ab ipsius angulis perpendiculares ducantur ad diametrum AC, puncta vero, in quibus perpendiculares Ellipsim secant, rectis jungantur: erit igitur polygonum quoddam in Ellipsi inscriptum, quod habebit ad polygonum in circulo AECF inscriptum, eandem rationem, quam habet BD ad ipsam EF: nam quoniam perpendiculares EH, KL in eadem ratione sectæ sunt in B et M (Cor. 2. Prop. 30. lib. 1.) manifestum est, quod trapezium LE ad ipsum LB eandem habet rationem, quam habet HE ad HB; quare et unumquodque reliquorum in circulo trapeziorum ad unumquodque in Ellipsi trapezium, eandem habet rationem quam habet EH ad ipsam BH; habent autem et triangula in circulo ad puncta A, C, ad ea quæ in Ellipsi sunt, eandem rationem; habebit igitur totum polygonum in circulo AECF inscriptum ad totum polygonum in Ellipsi inscriptum, eandem rationem quam habet EF ad ipsam BD: hanc autem rationem habet idem hoc polygonum, ad polygonum inscriptum in circulo Z, quoniam & ipsi circuli hanc habent rationem; polygonum igitur in circulo Z inscriptum æquale est, polygono Ellipsi inscripto, contra hypothesin, majus enim erat Fig. 18.

X toto

toto ſpatio ab Ellipſi comprehenſo. Sed eſto, ſi fieri poteſt, circulus Z minor ſpatio ABCD, rurſus poteſt in Ellipſi inſcribi polygonum, paribus numero lateribus contentum, majus circulo Z. Inſcribatur igitur, & ab ipſius angulis perpendiculares ducantur ad ipſam AC, & producantur ad circumferentiam circuli; rurſus igitur inſcriptum erit in circulo AECF polygonum, quod habebit ad inſcriptum in Ellipſi eandem rationem, quam habet EF ad BD, et ſi inſcribatur in circulo Z polygonum huic ſimile, oſtendetur inſcriptum in circulo Z æquale eſſe inſcripto in Ellipſi; quod fieri non poteſt: neque igitur minor eſt circulus Z ſpatio ab Ellipſi comprehenſo. Manifeſtum igitur eſt dictum ſpatium ad circulum AECF eandem habere rationem, quam habet BD ad ipſam EF. *Q. E. D.*

Cor. I. Hinc, patet omne ſpatium Ellipſi comprehenſum æquale eſſe circulo, cujus diameter eſt media proportionalis inter axes Ellipſeos.

Cor. II. Hinc, quævis Ellipſis eſt ad rectangulum ejus axibus contentum, ut circulus ſe habet ad quadratum ex ipſius diametro. Quoniam enim Ellipſis æqualis eſt circulo, cujus diameter eſt media proportionalis, inter ejus axes; erit rectangulum axibus Ellipſeos contentum æquale quadrato ex diametro hujuſce circuli; eſt igitur Ellipſis ad iſtud rectangulum, ut circulus iſte ad quadratum ex ipſius diametro.

SECTI-

SECTIONUM

CONICARUM

LIBER QUINTUS.

De Sectionibus similibus, & de Affectionibus Sectionum Conicarum, quæ a rectis harmonice sectis pendent; de circulis eandem cum Sectionibus Curvituram habentibus, & de Sectionibus describendis, quæ per data puncta transeant, & rectas positione datas contingant.

DEFINITIO I.

SI duæ diametri conjugatæ Ellipſeos aut Hyperbolæ ſint inter ſe, ut duæ diametri conjugatæ alterius Ellipſeos aut Hyperbolæ quæ eoſdem cum ipſis angulos comprehendunt; hæ duæ Ellipſes aut Hyperbolæ dicuntur *Similes.*

PROP. I.

Fig. 1, 2. Sint duæ Ellipſes aut Hyperbolæ inter ſe ſimiles, & ita ponantur ut habeant centrum commune C, & ut duæ diametri conjugatæ AB, MN unius ſectionis coincidant cum duabus diametris conjugatis *ab*, *mn* alterius ſectionis quibus ſunt proportionales; dico quod duæ quævis diametri conjugatæ unius ſectionis coincident cum diametris conjugatis alterius ſectionis: & quod omnes diametri coincidentes eandem rationem inter ſe habebunt.

Pars 1. DUCANTUR CD, CF ſemidiametri conjugatæ exterioris ſectionis ſciz. cujus diametri ſunt AB, MN; tum C*d*, C*f* interioris ſectionis ſemidiametri cum ipſis CD, CF coincidentes erunt conjugatæ.

Ducantur enim per M, *m* vertices diametrorum coincidentium duæ rectæ ſectiones contingentes erunt ſibi invicem parallelæ (per hypoth. & Cor. 27. lib. 1.) occurrant vero ſemidiametris CD, CF, cum opus productis, in punctis L, O & H, K; tum propter parallelas erunt rectangula OML, K*m*H ſimilia, ideoque ſunt inter ſe ut quadrata ex OM, K*m* vel CM, C*m*, hoc eſt, ut quadrata ex CA, C*a* per hypoth. ſed rectangulum OML eſt æquale quadrato

quadrato ex ſemidiametro CA (51. lib. 1.) ergo rectangulum K*m*H eſt æquale quadrato ex C*a* ſemidiametro interioris ſectionis, ideoque erunt C*d*, C*f* iſtius ſectionis ſemidiametri conjugatæ per Cor. 51. lib. 1.

Pars 2. Ducantur nunc CM, CD duæ quævis ſemidiametri ſectionis exterioris & ſint C*m*, C*d* ſemidiametri ſectionis interioris cum iis coincidentes; erit CM ad C*m*, ut CD ad C*d*.

Jungatur MD & ducatur CR ipſam MD bifariam ſecans in P & ſit C*r* ſemidiameter ſectionis interioris cum ipſa CR coincidens; quoniam, per partem primam, diametri quæ ipſis CR, C*r* ſunt conjugatæ coincidunt, rectæ ipſis CR, C*r* ordinatim applicatæ erunt parallelæ, ducatur *mp* ordinatim applicata ipſi C*r* & producatur ut occurrat ipſi CD in quodam puncto *d*, tum propter MD, *md* parallelas & MP, PD æquales, erunt etiam *mp*, *pd* æquales, ergo quoniam *mp* ordinatim applicatur ipſi C*r* & punctum *m* eſt in ſectione interiore, erit punctum *d* in eadem ſectione, ideoque eſt punctum *d* vertex ſemidiametri C*d*, & proinde propter parallelas MD, *md* erit CM ad C*m*, ut CD ad C*d*. *Q. E. D.*

Cor. I. Si duæ Ellipſes aut Hyperbolæ ſint ſimiles & ſimiliter poſitæ (id eſt poſitæ ut in hac propoſitione) et recta TX ſectione exteriore terminata interiorem contingat; in puncto contactus bifariam ſecabitur: ſit enim contactus *m*, & ducantur per *m* diametri coincidentes CM, *cm*, & quoniam contingens TX eſt parallela diametro ipſi C*m* conjugatæ, & diametri ipſis C*m*, CM conjugatæ coincidunt per partem primam hujus, erit recta TX ordinatim applicata diametro CM & proinde in puncto *m* bifariam ſecta.

Cor. II. Vel ſi recta YZ ſectione exteriore terminata occurrat interiori in duobus punctis *m* & *d*; erunt ſegmenta Y*m*, *d*Z, inter ſectiones utrinque intercepta, æqualia: nam ducatur diameter CR bifariam ſecans ipſam YZ in *p*; diameter C*r* cum ipſa CR coincidens bifariam ſecabit ipſam *md* in eodem *p*, nam quoniam

diametri

diametri ipsis CR, C*r* conjugatæ coincidunt, rectæ ordinatim applicatæ ipsis CR, C*r* sunt parallelæ, sed recta Y*p*Z ordinatim applicatur ipsi CR, ergo *mpd* ordinatim applicatur ipsi C*r*, ergo *mp*, *pd* æquantur & proinde segmenta Y*m*, *d*Z sunt æqualia.

Cor. III. Iisdem manentibus, si recta TX sectione exteriore terminata interiorem contingat in puncto quovis *m*, & si per aliud punctum *d* in sectione interiore, ducatur recta ipsi TX parallela, occurrens sectioni exteriori in punctis I & V; erit rectangulum I*d*V æquale rectangulo T*m*X sive quadrato ex T*m*; jungantur enim puncta *m*, *d* rectâ occurrente sectioni exteriori in punctis Y & Z, & quoniam per Cor. præcedens segmenta Y*m*, *d*Z sunt æqualia, erunt rectangula Y*d*Z, Y*m*Z æqualia, & proinde rectangula I*d*V, T*m*X contenta segmentis parallelarum quibus recta YZ occurrit, erunt inter se æqualia, Cor. 1. Prop. 18. lib. 1.

Cor. IV. Iisdem manentibus, si duæ rectæ MQ, TX terminatæ sectione exteriore contingant interiorem in punctis *d* & *m*, erunt inter se ut semidiametri CF, CA quibus sunt parallelæ: ducatur enim per contactum *d* recta ipsi TX parallela sectioni exteriori occurrens in I & V; (per 31. & 40. lib. 1.) rectangulum M*d*Q est ad rectangulum I*d*V hoc est rectangulum T*m*X (per Cor. præc.) ut quadratum ex CF ad quadratum ex CA, sed rectangula M*d*Q & T*m*X sunt quadrata ex M*d* & T*m*, ergo ipsæ M*d*, T*m*, sive totæ contingentes MQ, TX sunt inter se, ut semidiametri CF, CA; sive ut C*f*, C*a* cum iis coincidentes.

Fig. 2. Cor. V. Asymptoti similium Hyperbolarum eosdem angulos comprehendunt: sint enim duæ Hyperbolæ similes et similiter positæ, quarum centrum commune est C, et sint M, *m* vertices diametrorum coincidentium, et A, *a* vertices diametrorum iis conjugatarum, et quoniam sectiones similes sunt et similiter positæ, diametri CA, *ca* coincident, et erit CM ad C*m*, ut CA ad C*a*; ergo rectæ jungentes A, M et *a*, *m* sunt parallelæ; si igitur per centrum C ducantur duæ rectæ quarum una sit parallela ipsis AM,

AM, *am*, et altera eas bifariam ſecat, hæ rectæ erunt aſymptoti utriuſque Hyperbolæ per Cor. 3. 38. lib. 1. unde conſtat corollarium.

PROP. II.

Sint duæ Parabolæ EAD, *ead* quarum axes AB, *a*B coincidunt & eandem habent parametrum; dico quod duæ quævis diametri MN, *m*N coincidentes æquales habebunt parametros: & cum ſuis ordinatis æquales angulos comprehendent. FIG. 3.

Pars 1. SINT enim puncta F, *f* foci Parabolarum, et quoniam æqualiter diſtant a verticibus axium, per hypoth. et Def. foci, erit F*f* diſtantia inter focos æqualis ipſi A*a* diſtantiæ inter vertices axium, hoc eſt, ipſi M*m* diſtantiæ inter vertices diametrorum MN, *m*N per Cor. Prop. 10. lib. 3. ergo rectæ MF, *mf*, erunt ſibi invicem parallelæ et æquales (33. 1.) et proinde diametri coincidentes MN, *m*N æquales habent parametros, Cor. 1. Prop. 25. lib. 2.

Pars 2. Producatur diameter MN ultra verticem ad K, et propter parallelas MF, *mf*, erunt anguli KMF, K*mf* æquales, ideoque rectæ ML, *m*O hos angulos bifariam ſecantes erunt parallelæ (29. 1.) ſed Parabolas contingent (per Prop. 15. lib. 2.) ergo diametri coincidentes MN, *m*N æquales angulos cum contingentibus ML, *m*O et proinde cum ordinatis ſuis comprehendunt. *Q. E. D.*

Ut circuli ſolummodo in magnitudine diametrorum differunt, ſic & Parabolæ differunt ſolummodo in magnitudine parametrorum principalium & proinde omnes Parabolæ ſicut omnes circuli dicendæ ſunt ſimiles.

COR. I.

Cor. I. Si recta TO Parobolâ exteriore terminata, interiorem contingat in quovis puncto *m*, in isto puncto bifariam secabitur; ducatur enim per contactum diameter MN Parabolæ exterioris, & ex parte secunda hujus, constat rectam TO ipsi MN ordinatim esse applicatam.

Cor. II. Vel si recta ED Parabolâ exteriore terminata, interiori occurrat in punctis *e*, *d*, erunt segmenta E*e*, *d*D æqualia; ducatur enim diameter MN ipsam ED bifariam secans in P, & quoniam per partem secundam hujus, erit recta *ed* ordinatim applicata diametro *m*N cum ipsa MN coincidenti, erunt *e*P, P*d* æquales, ideoque segmenta E*e*, *d*D inter Parabolas sunt æqualia.

Cor. III. Si recta TO Parabolâ exteriore terminata contingat interiorem in puncto quovis *m*, & a quovis puncto *d*, in Parabola interiore ducatur recta ipsi TO parallela, occurrens Parabolæ exteriori in punctis E, D, erit rectangulum E*d*D æquale rectangulo T*m*O sive quadrato ex T*m*; jungendo *m*, *d*, probatur ex Cor. præc. eodem modo, quo Cor. 3. Propositionis præcedentis.

Cor. IV. Si duæ rectæ TO, MQ Parabolâ exteriore terminatæ interiorem contingant in punctis *m* & *d*, erunt ipsarum quadrata inter se, ut parametri diametrorum MN, OR quæ per puncta contactus transeunt; nam hæ rectæ ordinatim applicantur diametris MN, OR per Cor. 1. & per Cor. Prop. 10. lib. 3. abscissæ M*m*, O*d* sunt æquales; ergo quadrata ordinatarum T*m*, M*d* sunt inter se ut parametri diametrorum quibus applicantur, unde constat Corollarium.

Cor. V. Si duæ rectæ TO, MQ Parabolâ exteriore terminatæ interiorem contingant, abscindent a Parabola exteriore æqualia segmenta TMO, MOQ; nam ductis diametris M*m*N, O*d*R per puncta contactus, erunt abscissæ M*m*, O*d* æquales, ergo segmenta Parabolica TMO, MOQ erunt æqualia per Cor. 1. 13. lib. 3.

DEFI-

DEFINITIONES II, III.

II. SI recta AD, ita dividatur in punctis C, B, ut ſit tota AD ad utramvis partem extremam AC, ut reliqua extrema BD, ad mediam CB, recta AD *Harmonicè diviſa* dicitur. FIG. 4.

COR. I. Liquet partem mediam CB eſſe utrâvis parte extremâ minorem.

COR. II. Datis diviſionis harmonicæ duobus extremis punctis A,D, & mediorum uno C, invenitur quartum punctum B, ita ut pars data AC ſit extremarum una; nempe dividendo ſegmentum CD in puncto B, ita ut pars CB, ipſi AC proxima, ſit ad BD, ut AC, ad AD.

COR. III. Vel datis duobus mediis punctis C, B, & extremorum uno A, invenitur alterum extremum D; ducatur enim a puncto A recta AV, et ut extrema pars AC eſt ad partem mediam CB, ita ſit AV ad ſegmentum VQ ſumptum verſus A; jungatur BQ & ducatur recta VD ipſi QB parallela occurrens ipſi ACB productæ in D, et erit AD ad BD, ut AV ad QV, hoc eſt per Conſtructionem, ut AC ad CB.

COR. IV. Ex Corollario ſecundo patet, quod in diviſione quavis harmonica, manentibus duobus punctis extremis A, D, et puncto medio C, & unâ parte extremâ AC; nullum punctum præter B inveniri poteſt, quod ſit quartum punctum iſtius diviſionis. Et ex Corollario tertio patet, quod manentibus duobus punctis mediis C, B, & puncto extremo A, et parte mediâ CB, nullum punctum præter D inveniri poteſt, quod ſit quartum punctum iſtius diviſionis.

Defin. III. Si recta harmonice dividatur in punctis *a*, *c*, *b*, *d*, et utcunque producantur per puncta diviſionis quatuor rectæ V*a*, V*c*, V*b*, V*d*, vel inter ſe parallelæ, vel in eodem puncto V convenientes; hæ rectæ dicuntur *Harmonicales*. FIG. 5.

LEMMA I.

Fig. 4. SINT rectæ V*a*, V*c*, V*b*, V*d* harmonicales in eodem puncto V convenientes; si quævis recta, uni istarum V*d* parallela, tribus reliquis occurrat in punctis E, C, F, bifariam secabitur in puncto intermedio C. Vel si quævis quatuor harmonicales utcunque occurrant rectæ in punctis A, C, B, D, hæc recta in istis punctis harmonice secabitur.

Pars. 1. Per punctum intermedium C ducatur recta parallela rectæ *ad*, a qua harmonicales formantur, ipsis occurrens in punctis A, B, D, patet hanc rectam, dividi in eadem ratione, in qua dividitur recta *ad*, hoc est, dividi harmonice in punctis, A, C, B, D; est igitur AD ad AC, ut BD ad CB, propter vero VD, EC parallelas, est VD ad EC (ut AD ad AC, hoc est, ut BD ad CB, hoc est) ut eadem VD ad CF (propter VD, CF parallelas,) ergo æquales sunt EC, CF.

Pars 2. Occurrat nunc quævis recta quatuor harmonicalibus in punctis A, C, B, D, & si istæ harmonicales sint inter se parallelæ, satis constat propositum (ex Cor. Prop. 2. 6.) si vero occurrant sibi invicem in V; per punctorum mediorum alterutrum C ducatur ECF parallela rectæ VD, quæ transit per punctum extremum D a puncto C remotiore, duabus reliquis occurrens in E, F; per partem primam, erunt EC, CF æquales, & est AD ad AC, ut VD ad EC sive CF, hoc est, ut BD ad CB: ergo est AD ad AC, ut BD ad CB. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. III.

Ocurrant sibi invicem duæ rectæ AB, AC contingentes sectionem conicam vel sectiones oppositas et ducatur BC jungens contactus; si per A occursum contingentium ducatur recta occurrens sectioni vel sectionibus in punctis E, K & jungenti contactus in O, harmonice secabitur in istis punctis A, E, O, K. FIG. 5, 6.

Cas. 1. PRIMO sit recta per A ducta non diameter, per puncta E & K ducantur rectæ, parallelæ ipsi BC jungenti contactus, occurrentes contingentibus in D, G & H, M, et sectioni vel sectionibus in F et L; per A ducatur diameter occurrens rectis DG, BC, HM in punctis N, P, Q. & quoniam bifariam secat rectam BC in P (Cor. 1. 25. lib. 1.) bifariam secabit ipsas DG, HM in N et Q. & quoniam EF, KL sectione vel sectionibus terminatæ ut sint ipsi BC parallelæ, bifariam secabuntur in N & Q. ergo segmenta DE, FG & segmenta HK, LM erunt æqualia, & proinde rectangula DEG, HKM erunt æqualia rectangulis EDF, KHL.

Propter parallelas DG, HM, erit HK ad DE, ut KM ad EG, ergo similia sunt rectangula HKM, DEG, et proinde hæc rectangula sive rectangula KHL, EDF sunt inter se, ut quadrata ex HK, DE, sive ut quadrata ex HA, DA; sed eadem rectangula KHL, EDF sunt inter se, ut quadrata ex HB, BD, (per Cor. 4. 18. lib. 1.) ergo quadrata ex HA, DA sunt inter se ut quadrata ex HB, BD, ideoque est HA ad DA, ut HB ad BD (22. 6.) & igitur, propter parallelas, est KA ad EA, ut KO ad OE; ergo recta AK harmonice secatur in punctis A, E, O & K.

Cas. 2. Cum rectæ contingant eandem sectionem & recta per A ducta sit diameter; occurrat hæc ipsi BC in P & sectioni vel sectionibus oppositis in punctis R, T, rectæ per hæc puncta ductæ ipsi BC parallelæ erunt contingentes; occurrant vero contingenti FIG. 5.

AB in S & V; propter parallelas erit VA ad SA, ut VT ad SR, hoc eſt ut VB ad BS (per Cor. 5. 18. lib. 1.) ergo propter parallelas eſt TA ad RA, ut TP ad PR: ergo diameter per A ducta harmonice ſecatur in punctis A, R, P, T. *Q. E. D.*

Cor. Patet ex demonſtratione hujus, quod ſi contingens VBS occurrat duabus contingentibus parallelis VT, SR in punctis V, S, & jungenti contactus in A, ſecabitur harmonice in punctis V, B, S, A, ſciz. in puncto contactus et punctis in quibus contingentibus & jungenti contactus occurrit.

PROP. IV.

Si tres rectæ contingant ſectionem vel oppoſitas ſectiones; quævis ipſarum harmonice ſecabitur, ſciz. in puncto contactus, & punctis in quibus occurrit reliquis contingentibus, & rectæ jungenti ipſarum contactus.

Si duæ ex contingentibus ſint parallelæ & tertia occurrat rectæ jungenti ipſarum contactus; conſtat propoſitum per Cor. præcedens.

Fig. 7. Si vero tres rectæ AB, AC, MD, contingentes ſectionem vel ſectiones oppoſitas in punctis B, C, K, inter ſe conveniant in A, D, M, et juncta BC occurrat ipſi MD ſi opus productæ in H, erit HM ad HD, ut MK ad KD.

Per punctum D, interſectionem contingentium DK, DC, ducatur recta alteri contingenti AB parallela, & ſectionem, vel utramque ſectionem ſecans in punctis E, G & occurrens ipſi BC in F, rectangulum EDG erit æquale quadrato ex DF (53. lib. 1.) eſt autem propter parallelas, quadratum ex HM ad quadratum ex HD, ut quadratum ex MB ad (quadratum ex DF ſive) rectangulum EDG, hoc eſt (per Cor. 6. 18. lib. 1.) ut quadratum ex MK ad quadratum ex KD, eſt ergo HM ad HD, ut MK ad KD. *Q. E. D.*

Cor.

Cor. 1. Hinc si recta BC jungens puncta contactus contingentium MB, DC occurrat alteri contingenti MKD in H, et per ejus contactum K ducatur recta occurrens ipsi BC in L, parallela ipsis AB AC si modo ipsæ sint parallelæ, aliter transiens per ipsarum occursum A, harmonice secabitur recta BC in punctis H, B, L, C. Nam si ipsæ MB, DC concurrant in A, jungatur HA, & quoniam per propositionem contingens MKD harmonice secatur in punctis H, M, K, D; erunt rectæ AH, AM, AK, AD harmonicales: ergo per part. 2. Lem. præc. recta HBC harmonice secatur in H, B, L, C.

Si vero contigentes MB, DC, sint parallelæ, contingens MKD harmonice secatur in punctis H, M, K, D per Cor. Prop. præc. ergo (propter MB, KL, DC parallelas) recta HBC harmonice secatur in punctis H, B, L, C.

Cor. II. Hinc si dentur positione duæ rectæ MB, DC contingentes sectionem in punctis datis B, C, et detur quodvis punctum K in sectione; inveniri potest positio contingentis, quæ transit per K. Ducatur enim per K recta occurrens ipsi BC in L, et parallela ipsis MB, DC, si sint parallelæ, aliter transiens per ipsarum occursum A, si LB, LC sint æquales, recta AKL est diameter, & igitur contingens per K ducta, erit parallela ipsi BC. Si vero LB sit ipsi LC minor, producatur LB ad H, ita ut HB sit ad HC, ut BL ad LC (Cor. 3, ad Def. 2.) erit juncta HK contingens; nam si non, per K ducatur contingens, necessario occurret alicubi LB productæ versus H, puta in N. Tum per coroll. præced. recta HC, quæ per constructionem harmonice secatur in H, B, L, C, harmonice quoque secabitur in N, B, L, C, contra Cor. 4. Def. 2. est igitur recta HK contingens.

PROP.

PROP. V.

Fig. 8, 9, 10, 11 12. In diametro sectionis conicæ DR sumantur duo puncta A, B, (ad diversas partes centri si fuerit DR diameter secunda Hyperbolæ, secus ad easdem) ita ut in Ellipsi aut Hyperbola, semidiameter CD media sit proportionalis inter CA, CB, distantias punctorum a centro C; in Parabola vero ut DA, DB distantiæ punctorum a vertice D sint inter se æquales; & per hæc puncta A, B ducantur rectæ AT, BQ paralellæ ordinatim applicatis diametro DR: si per alterutrum punctorum A vel B, puta B, ducatur recta sectionem vel sectiones oppositas secans in duobus punctis O & P; FO, FP, quæ in istis punctis sectionem, vel sectiones contingunt, erunt vel parallelæ rectæ AT, per alterum punctum A ductæ, vel ad istam rectam sibi invicem occurrent.

Si secans per B ducta coïncidat cum diametro DR, patet contingentes per vertices ejus ductas esse paralellas rectæ AT, quia sunt parallelæ ordinatim applicatis diametro DR.

Si vero punctum B sit intra sectionem, vel inter Hyperbolas & secans coincidat cum ipsa BQ & occurrat sectioni vel utrique sectioni in Q & S, patet congentes per Q & S ductas, sibi invicem occurrere in ipso puncto A, quia sciz. in Ellipsi vel Hyperbola, CB, CD, CA sunt proportionales & in Parabola DA, DB sunt æquales.

Ducatur autem secans OP, quæ nec coincidat cum diametro DR nec cum recta BQ. tum contingentes per O & P ductæ sibi invicem alicubi occurrent ut in F; per punctum F ducatur diameter CEF ipsam OP bifariam secans in G (26. lib. 1.) a & puncto D, vertice diametri

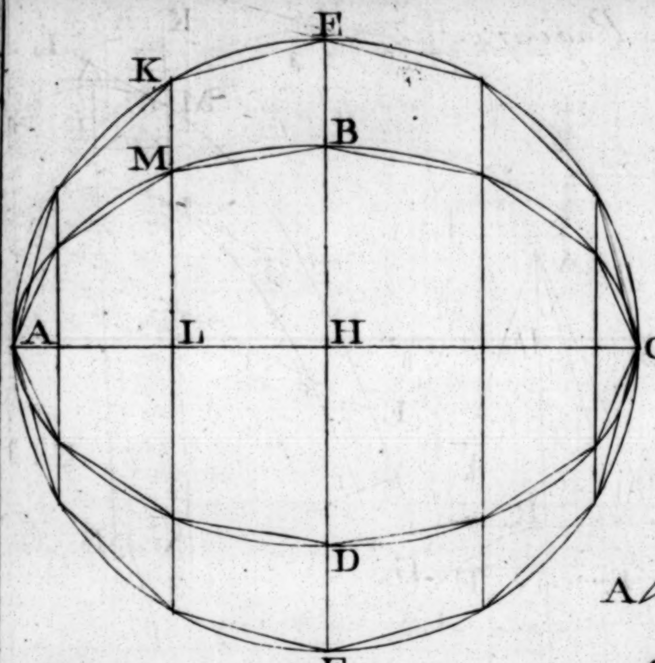
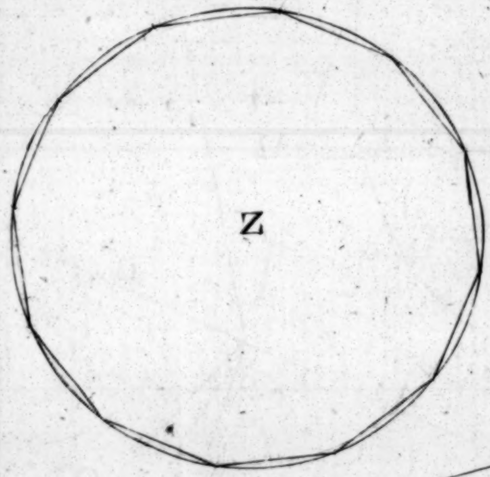


FIG. 18.



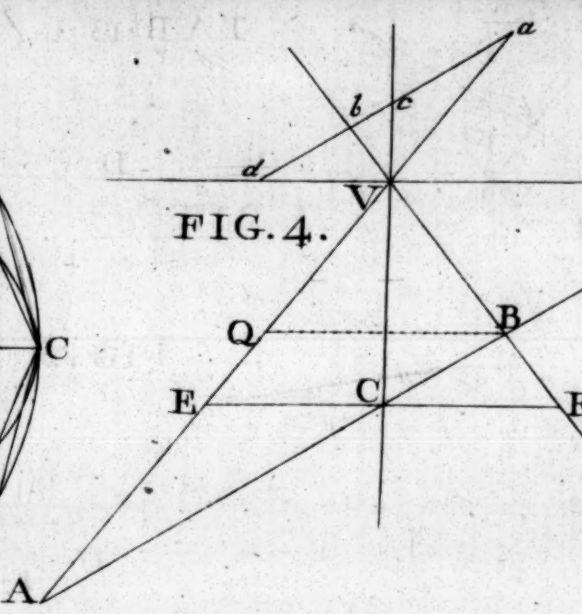


FIG. 4.

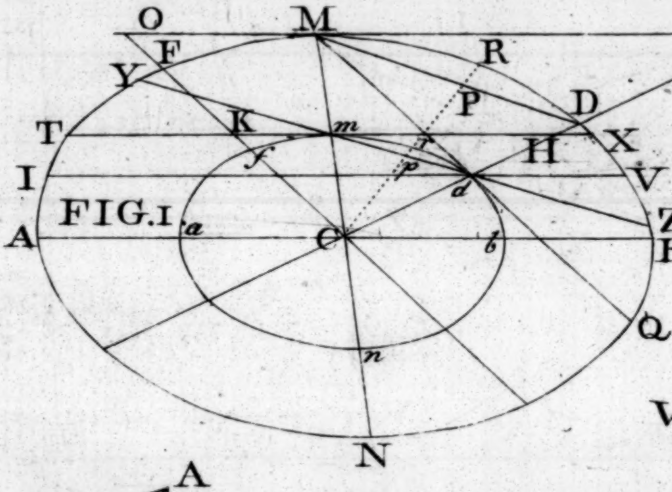


FIG. 1.

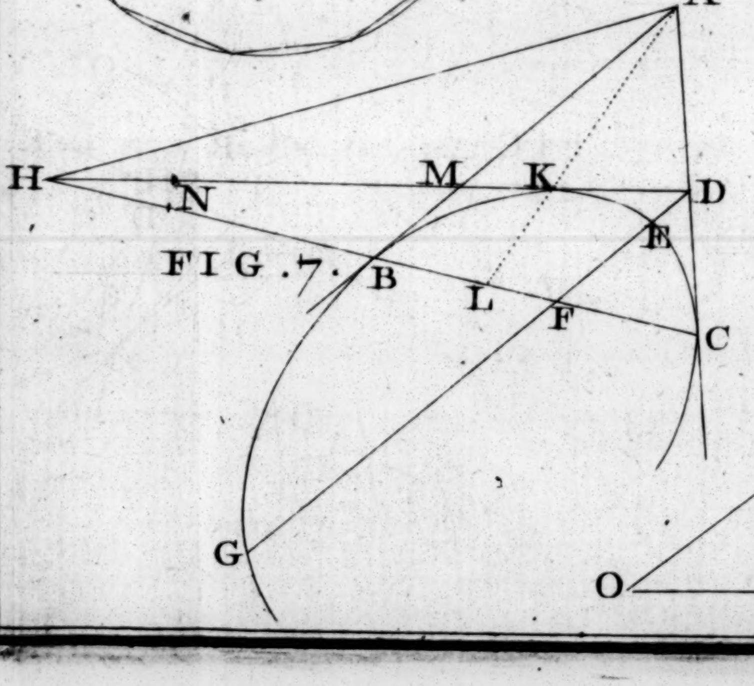


FIG. 7.

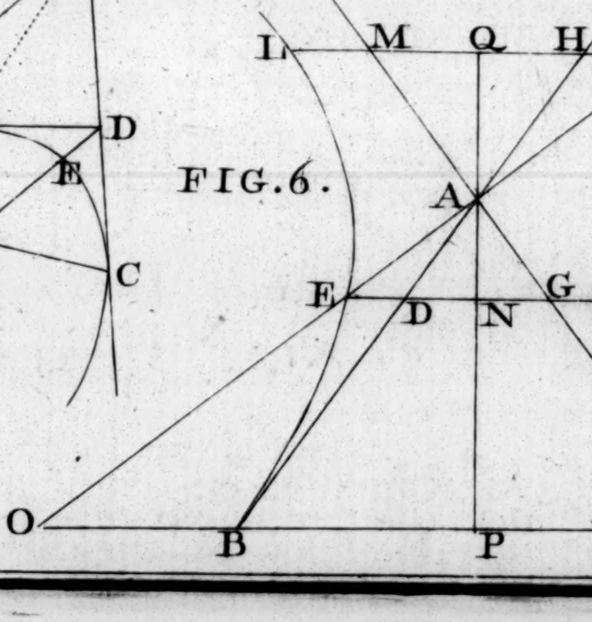
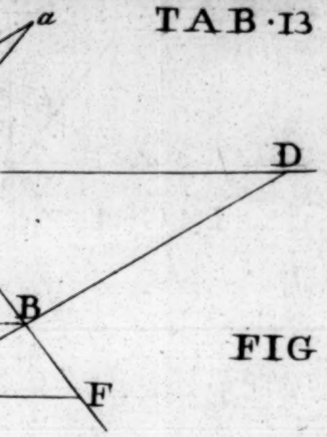


FIG. 6.



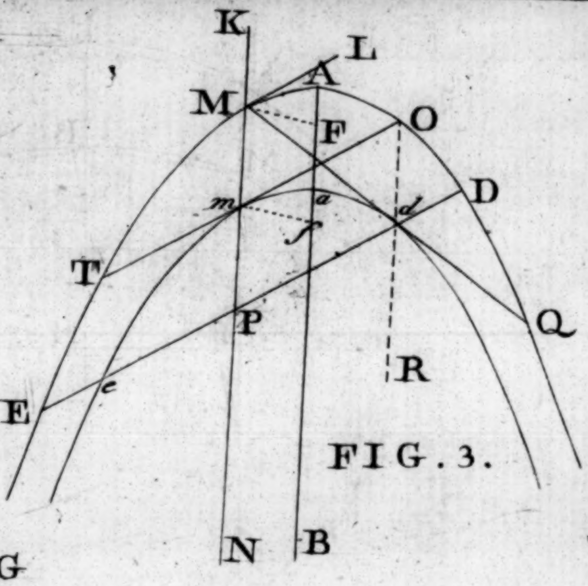


FIG. 3.

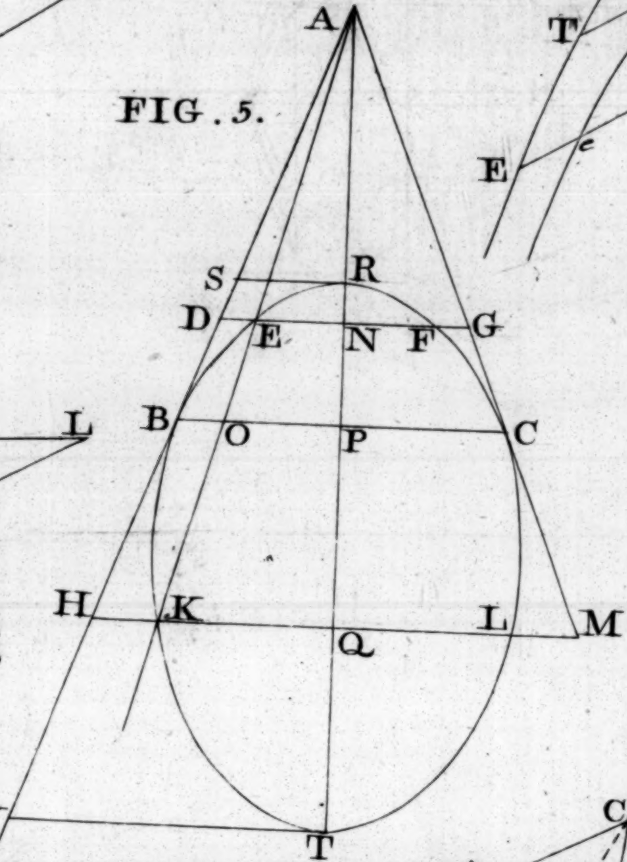
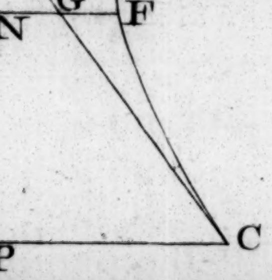


FIG. 5.



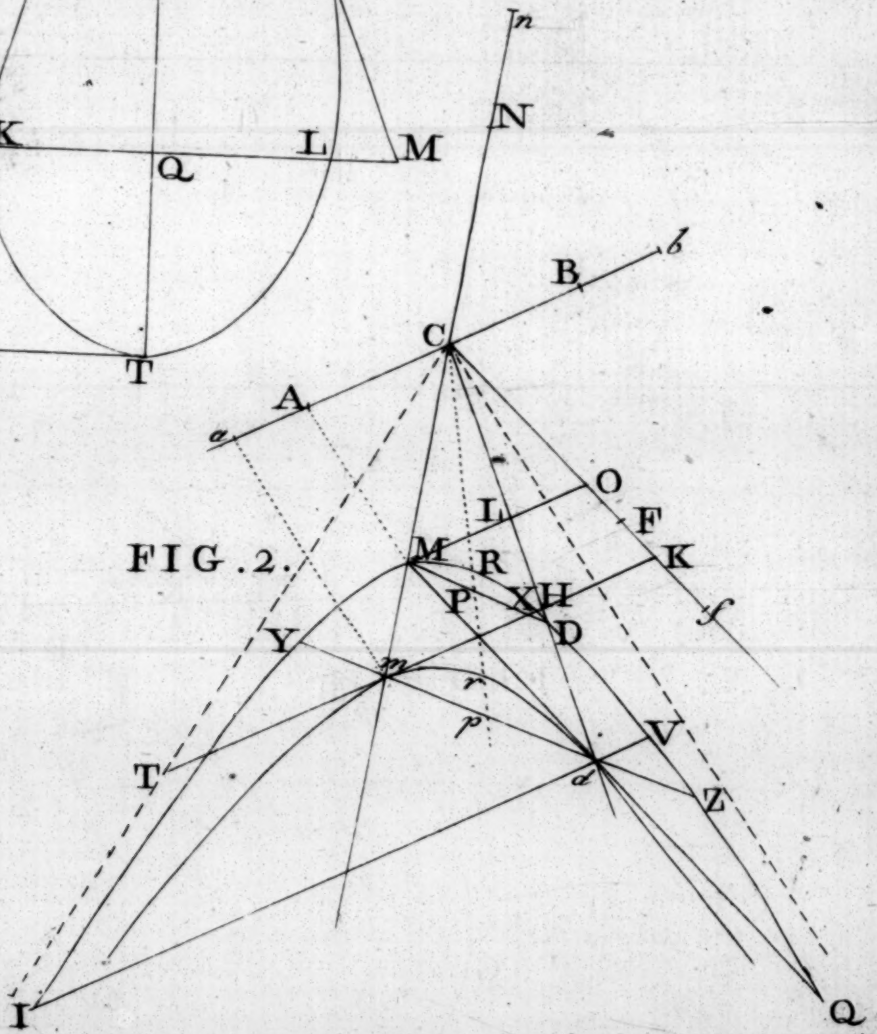


FIG. 2.

7 AP 53

diametri DR inter puncta A & B, ducatur DK ordinatim applicata diametro CE, et DH ſectionem vel ſectionem conjugatam contingens, & occurrens diametro CE in H, erit DH ipſi AT parallela.

Quoniam igitur cum ſectio ſit Ellipſis, vel Hyperbola (per 48. & 49. lib. 1.) utrumque rectangulum GCF, KCH eſt æquale quadrato ex ſemidiametro CE, erunt hæc rectangula inter ſe æqualia, & proinde eſt CF ad CH, ut CK ad CG (ſive propter parallelas DK, OBG) ut CD ad CB, hoc eſt per hypotheſin, ut CA ad CD: ergo ſi jungatur AF, quoniam CF eſt ad CH, ut CA ad CD, erit AF parallela ipſi DH, ſive ipſi AT; ergo punctum F eſt in recta AT.

Cum vero ſectio ſit Parabola, eſt GE ipſi EF & KE ipſi EH æqualis (per 47. lib. 1.) ergo HF eſt æqualis (ipſi GK ſive, propter parallelas DK, OBG, ipſi BD, hoc eſt per hypotheſin) ipſi DA: ergo quoniam HF, DA ſunt æquales & parallelæ, ſi jungatur AF, erit hæc parallela ipſi DH, ſive ipſi AT: ergo punctum F eſt in recta AT. *Q.E.D.* Fig. 12.

Cor. I. Iiſdem manentibus, ſi per alterutrum punctorum A vel B, puta B ducatur recta occurrens ſectioni vel ſectionibus in duobus punctis M, L, & rectæ AT, per alterum punctum A ductæ, in F; harmonice ſecabitur, ſciz. in punctis F, M, B, L.

Sit primo B punctum intra ſectionem & ducatur diameter CE transſiens per F, & per B ducatur recta ordinatim applicata ipſi CE, occurrens ſectioni vel ſectionibus in punctis O, P; contingentes per O, P, ductæ concurrent alicubi in diametro CEF (per Cor. 2. 26. lib. 1.) concurrent etiam alicubi in recta AT, per hanc Prop. igitur concurrent in puncto F, ac proinde recta per B ducta ſecatur harmonice (per 3. huj.) in punctis F, M, B, L. Si vero B ſit punctum extra ſectionem & recta AT occurrat ſectioni, vel ſectionibus in punctis T, N; cum (ex Prop. 52. lib. 1.) patet Fig. 8, 11. Fig. 9, 10.

junctas

junctas BT, BN, esse contingentes, constat propositum per Prop. 3. hujus. Supple rectam LBM in Fig. 9, 10, 12.

Cor. II. Si detur positione sectio conica, & detur punctum quodvis B non centrum sectionis nec in asymptoto Hyperbolæ; duæ quævis rectæ contingentes sectionem vel oppositas sectiones, & ductæ per terminos secantis transeuntis per B, sibi invicem occurrent in recta quadam AT, cujus positio per hanc Prop. determinatur.

Cor. III. Vel si positione dentur sectio conica, & recta quævis AT non diameter sectionis, & a quovis puncto F in ipsa AT, ducantur duæ rectæ contingentes sectionem vel sectiones oppositas; recta jungens puncta contactus transibit per punctum datum. Nam quoniam positione dantur sectio & recta AT, dabitur positione diameter CD, cujus ordinatæ sunt ipsi AT parallelæ, & ergo dabuntur vertex ejus D & punctum A in quo occurrit ipsi AT, ideoque in diametro CD dabitur punctum B positum respectu punctorum A & D, ut in propositione; si a quovis puncto F in ipsa AT ducantur contingentes FO, FP, recta OP jungens ipsarum contactus transibit per B. Nam si non, duci poterit a puncto B recta ad unum punctum contactus O quæ iterum occurret sectioni vel sectioni oppositæ in alio puncto; tum contingens per hoc punctum ducta occurreret contingenti FO in recta AT per hanc Prop. hoc est, ipsi FO occurreret in F, tres igitur contingentes sibi invicem occurrerent in F, quod fieri nequit (Cor. 3. 26. lib. 1.) ergo constat propositum.

PROP.

PROP. VI.

Iisdem manentibus, si per utrumvis punctorum A, vel B, puta B, ducatur recta BOP Hyperbolæ asymptoto CY parallela, occurrens uni e sectionibus oppositis in O; contingens ducta per punctum O occurret rectæ AT (ductæ sciz. per alterum punctum A) ad ipsam asymptoton CY. Fig. 13, 14.

CUM enim in Fig. 13. contingens OF non transit per D verticem sciz. diametri DR inter puncta A, B, non erit parallela ipsi AT, sed occurret ei productæ versus asymptoton CY, & in Fig. 14. manifestum est contingentem OF ipsi AT occurrere, occurrat igitur OF ipsi AT in F; erit F ad asymptoton CY.

Nam si non, a puncto F duci potest (52. lib. 1.) altera recta contingens unam e sectionibus oppositis in puncto quodam X, jungatur OX, & quoniam punctum F, a quo ducuntur contingentes FO, FX, est in recta AT & punctum B positum est respectu punctorum A, D, ut in propositione præcedente, recta OX transibit per punctum B (per Cor. præc.) hoc est coincidet cum recta BOP, ergo recta BOP, quæ est asymptoto parallela, occurrit sectioni, vel sectionibus in duobus punctis O & X, quod fieri nequit, est igitur punctum F ad asymtoton CY. *Q.E.D.*

Cor. I. Si positione detur Hyperbola, & detur punctum F in ejus asymptoto CY, & a puncto F ducatur recta occurrens Hyperbolæ vel oppositis Hyperbolis in duobus punctis N, T; contingentes per hæc puncta ductæ sibi invicem occurrent in quadam recta OP quæ positione dabitur. A puncto F ducatur recta contingens Hyperbolam in puncto O, quoniam a puncto F unica contingens duci potest dabitur punctum O, & proinde recta OP ducta ipsi CY parallela positione dabitur; occurrant sibi invicem

 vicem

vicem contingentes per N, T ductæ in B, erit punctum B ad rectam OP; nam per B ducatur diameter CD & ſit vertex ejus D, & occurrat ipſi NT in A, erunt CB, CD, CA proportionales, & erit AT ordinatim applicata diametro CD, ergo puncta B, D, A & recta NAT ponuntur ut in hac propoſitione; ſi igitur punctum B non ſit in recta OP, duci poteſt per B recta ipſi CY parallela, quæ occurret Hyperbolæ in puncto ab O diverſo, & contingens per iſtud punctum ducta occurret ipſi NAT ad aſymptoton CY, per propoſitionem, ergo ei occurret in F & igitur duæ contingentes ad aſymptoton occurrent, quod fieri nequit; eſt igitur B occurſus contingentium per N, T ductarum, in recta OP.

Cor. II. Vel ſi poſitione dentur Hyperbola & recta OP ipſius aſymptoto CY parallela; ſi a quovis puncto B in ipſa OP ducantur duæ rectæ, Hyperbolam, vel Hyperbolas oppoſitas contingentes in duobus punctis N, T; recta jungens iſta puncta tranſibit per punctum datum in aſymptoto CY cui recta OP eſt parallela. Ducatur diameter CD per B, occurrens ipſi NT in A, & per punctum O, in quo recta OP Hyperbolæ occurrit, ducatur contingens occurrens aſymptoto CY in F, & quoniam proportionales ſunt CB, CD, CA & recta NAT ſit ordinatim applicata diametro CD, contingens OF occurrit ipſi NAT ad aſymptoton CY, per hanc Prop. ergo recta jungens contactus N, T tranſibit per punctum F: ſed propter OP poſitione datam, dabitur punctum O & proinde contingens OF poſitione datur, occurrit autem ipſi CY poſitione datæ in F, eſt igitur punctum F datum.

Cor. III. A puncto quovis F in Hyperbolæ aſymptoto CY, ducatur recta contingens Hyperbolam in O & per O ducatur recta OP ipſi CY parallela: ſi per punctum F ducatur recta ſecans Hyperbolam vel Hyperbolas in punctis N, T, & occurrens ipſi OP in M, ſecabitur harmonice in punctis N, M, T, F.

Nam

Nam contingentes NB, TB ductæ per puncta N & T inter ſe convenient ad rectam OP, per Cor. 1. occurrat contingens OF ipſis NB, TB in E, G; quoniam per Prop. 4. hujus, contingens OF harmonice ſecatur in F, G, O, E, erunt BF, BG, BO, BE harmonicales: igitur recta NTF harmonice ſecatur in punctis N, M, T, F, per Part. 2. Lem. 1.

Cum rectæ NB, TB contingant Hyperbolas oppoſitas erit aliquando una ipſarum ut NB parallela contingenti OF, tum erit juncta ON diameter, & quia diameter BCA bifariam ſecat ipſam TN in A, propter OC, CN ut & TA, AN æquales, erit juncta OT parallela ipſi BCA, ergo quoniam BOM bifariam ſecatur in O (Cor. 2. 54. lib. 1.) erit MT æqualis ipſi TA ſive AN, & ſimiliter propter parallelas OF, BN, erit MF æqualis ipſi FN, ergo TF, FA æquantur, eſt igitur TA ſive MT dupla ipſius TF, ideoque eſt MN ad FN, ut MT ad TF, ergo conſtat propoſitum. Fig. 14.

PROP. VII.

Iiſdem manentibus, ſi per utrumvis punctorum A vel B, ducatur ad rectam per alterum punctum ductam, recta aſymptoto Hyperbolæ parallela, ab Hyperbola bifariam ſecabitur. Fig. 15.

PRIMO, ducatur per punctum A extra Hyperbolam recta aſymptoto CY parallela, occurrens rectæ BQ in P et Hyperbolæ in O; quoniam proportionales ſunt CA, CD, CB et recta BQ occurrit Hyperbolæ in punctis Q, S et eſt ordinatim applicata diametro CD, erunt junctæ AQ, AS contingentes et proinde recta AP bifariam ſecatur in O per Cor. 2. 54. lib. 1.

Secundo, ducatur per punctum B intra Hyperbolam, recta aſymptoto CY parallela, occurrens ipſi AT in F & Hyperbolæ in M, bifariam ſecabitur BF in M: nam ducatur AOP ipſi

 CY

CY parallela, ut in caſu præcedente, & per O ducatur recta ipſi BQ parallela, occurrens diametro CDR in G & rectæ BF in L; propter parallelas erit BP æqualis ipſi OL, & propter AP duplam ipſius AO, erit (BP hoc eſt) OL dupla ipſius OG; ergo OL bifariam ſecatur a diametro CDR in G: ſed OL eſt iſti diametro ordinatim applicata per conſtructionem, & terminus ejus O eſt in Hyperbola, ergo terminus ejus alter L eſt in eadem Hyperbola; ergo recta OGL occurrit ipſi BF ad Hyperbolam, hoc eſt, in puncto M, & igitur, propter parallelas BP, MO, FA & æquales PO, OA, erunt BM, MF æquales.

PROP. VIII.

Si in ſectione conica vel in oppoſitis ſectionibus inſcribantur duæ rectæ, non inter ſe parallelæ, & termini ipſarum quatuor rectis jungantur; harum interſectiones, & duæ interſectiones contingentium, quæ per terminos utriuſque inſcriptæ ducuntur, erunt omnes quatuor in recta linea.

Fig. 16. SINT AC, BD duæ rectæ inſcriptæ, quæ ſi opus productæ concurrant in E, & junctæ AD, BC concurrant in F, junctæ vero AB, DC concurrant in G, & contingentes per A, C ductæ concurrant in H, quæ vero per B, D ducuntur concurrant in K; erunt quatuor puncta F, G, H, K in recta linea.

Nam per E ducatur NO diameter ſectionis & (in Ellipſi & Hyperbola) diſtantiæ puncti E a centro N, ipſique ſemidiametro NO, ſumatur tertia proportionalis NP, ponenda ut in Prop. 5. hujus dictum fuit; in Parabola vero diſtantiæ puncti E a vertice O fiat æqualis OP, & in utroque caſu per punctum P ducatur recta PQ parallela ordinatim applicatis diametro NO; concurſus contingentium AH, CH & contingentium BK, DK erunt in recta

PQ

FIG. 8.

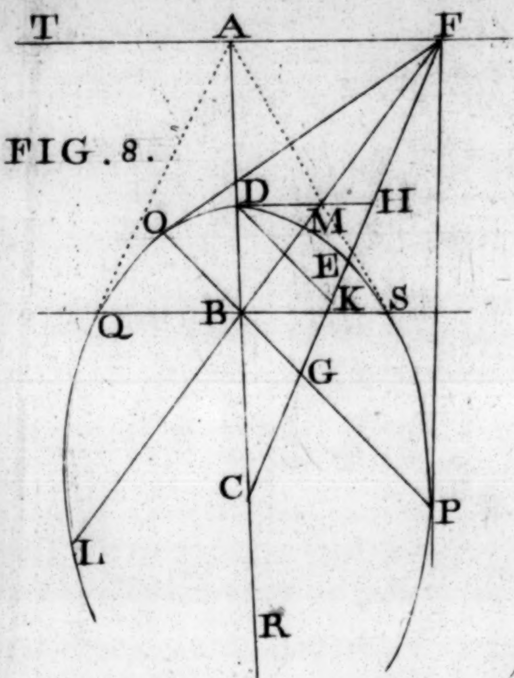


FIG. 9.

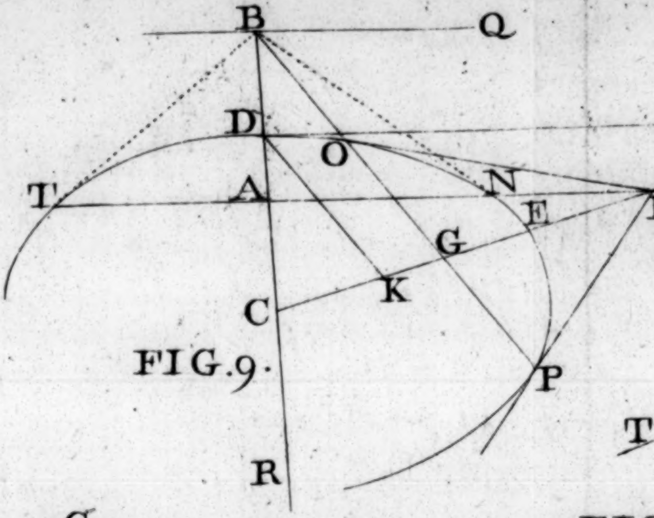


FIG. 13.

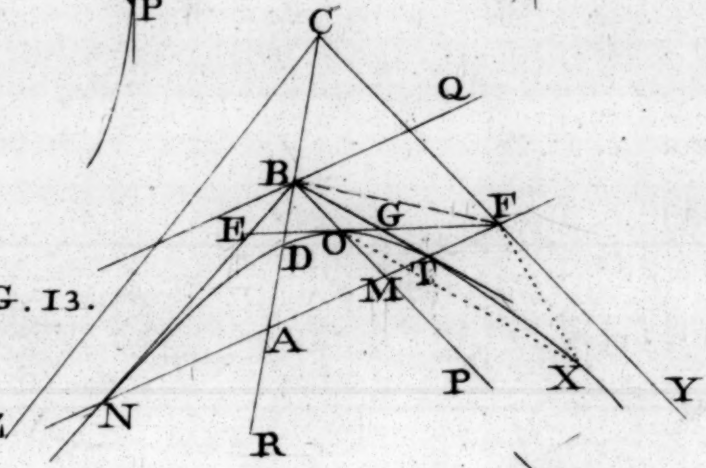


FIG. 14.

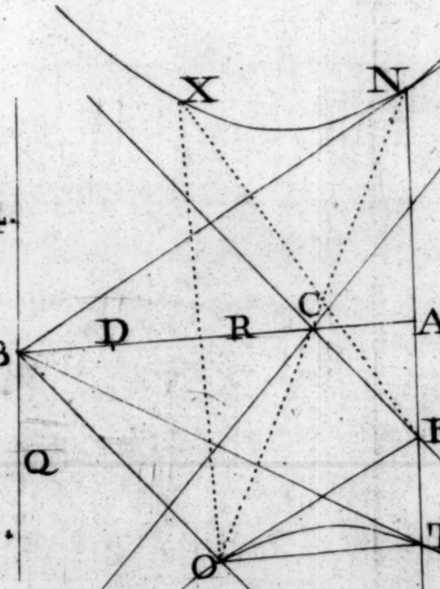
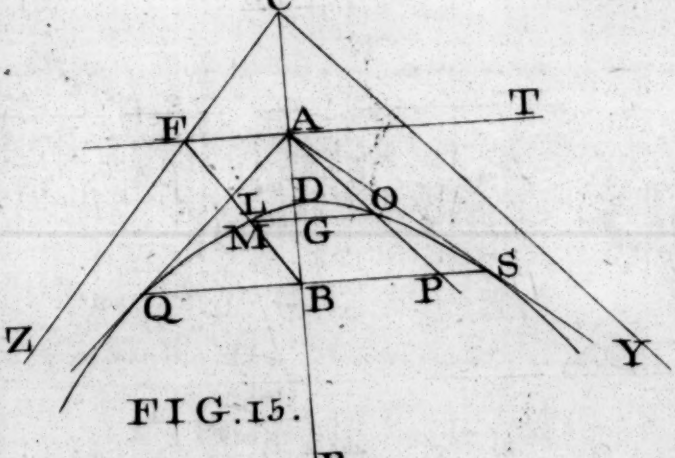
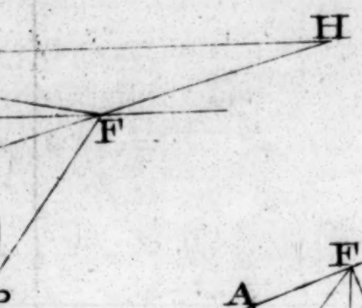


FIG. 15.



TAB 14. *Page 180*



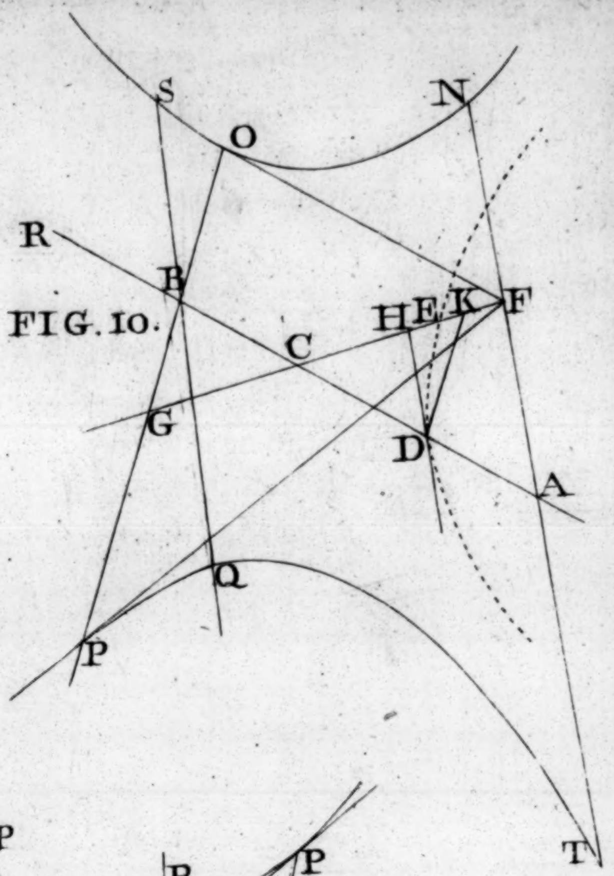


FIG. 10.

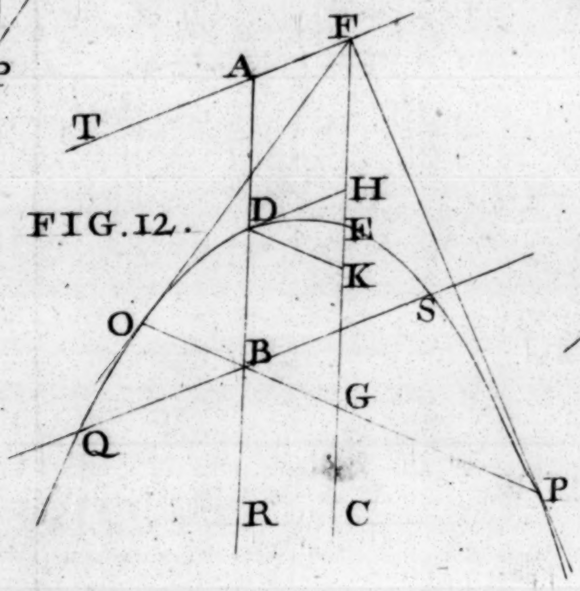


FIG. 12.

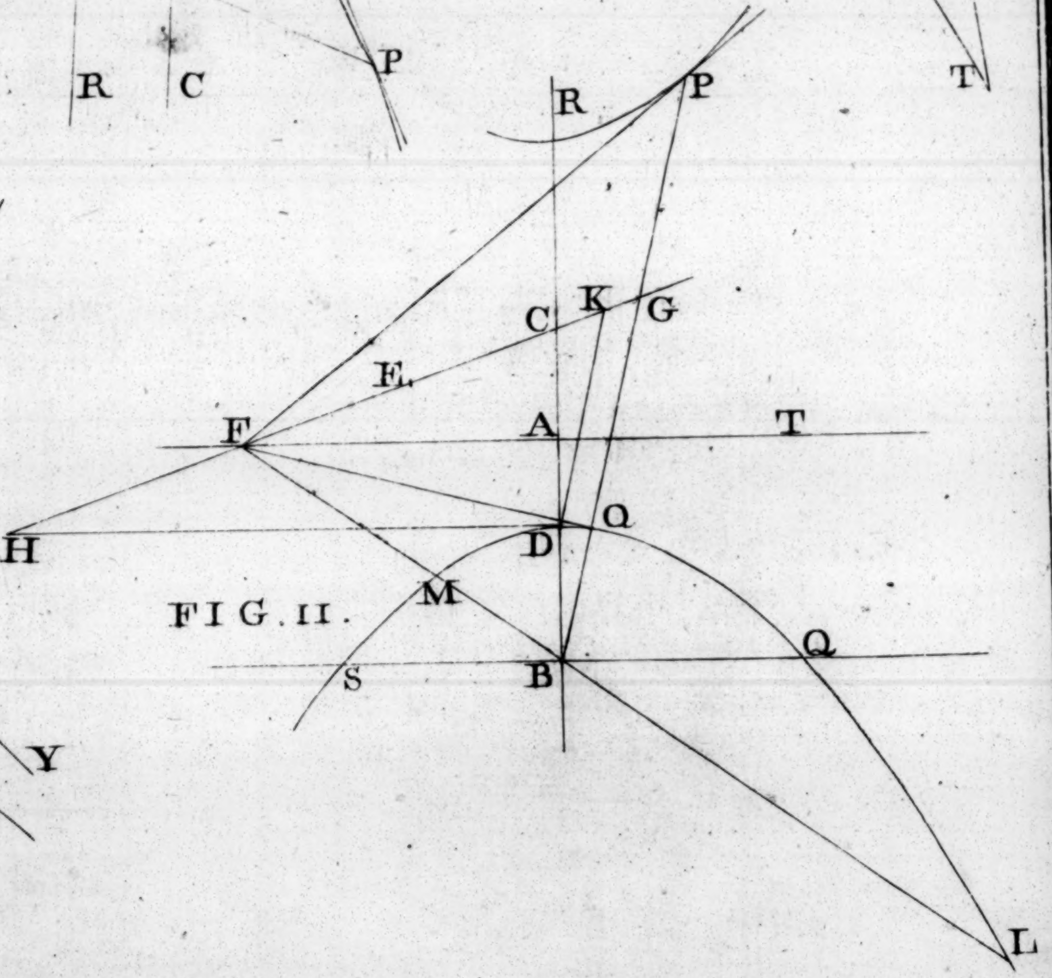


FIG. 11.

7 AP 53

PQ (per Prop. 5. huj.) occurrat recta PQ ipsis AC, BD (si opus productis) in L, M; tum recta AC in punctis A, L, C, E, & recta BD in punctis B, M, D, E, harmonice secabuntur (per Cor. 1. Prop. 5. huj.) occurrat juncta CB, ipsi PQ in F, & si juncta AD non transeat per F, jungatur DF occurrens ipsi AC in X, & quoniam B, M, D, E sunt puncta divisionis harmonicæ si jungatur FE, erunt FE, FD, FM, FB harmonicales, ergo recta AC iis occurrens in punctis X, L, C, E, harmonice in istis punctis secabitur (per Par. 2. Lem. 1.) contra Cor. 4. ad Def. 2. quia secta est harmonice in punctis A, L, C, E: ergo juncta AD transit per F; deinde junctâ AB occurrente ipsi PQ in G, ostendetur eodem prorsus modo junctam CD transire per G; ergo quatuor puncta H, K, F, G sunt in recta linea sciz. PQ. *Q. E. D.*

Cor. I. Si vero rectæ AB, CD jungentes terminos inscriptarum sint inter se parallelæ, erunt parallelæ ipsi PQ in qua concurrunt contingentes per terminos inscriptarum ductæ; nam si una ipsarum AB occurrat ipsi PQ in aliquo puncto G, tum ut prius ostendi potest junctam DG transire per C, ergo CD ipsi AB occurreret in G contra hypothesin, ergo constat propositum.

Cor. II. Si sectioni vel sectionibus inscribantur duæ rectæ inter se parallelæ, contingentes ductæ per terminos utriusvis parallelæ concurrent ad diametrum parallelas bisecantem (Cor. 2. Prop. 26. lib. 1.) & manifestum est rectas terminos parallelarum jungentes ad eandem diametrum concurrere.

PROP.

PROP. IX.

Fig. 17, 18. Si recta secans sectionem vel sectiones oppositas in duobus punctis P, Q occurrat directrici sectionis DX in B, & a foco F, ipsi DX propiore, ducantur tres rectæ ad puncta P, Q, B; recta FB ad directricem ducta bifariam secabit angulum QFP, contentum reliquis ductis, cum puncta P, Q sint in oppositis sectionibus, angulum autem KFP qui angulo QFP deinceps est, cum P, Q sint in eadem sectione.

DUCANTUR enim a punctis Q, P perpendiculares QM, PN ad directricem, & erit QB ad PB, ut QM ad PN, hoc est, ut QF ad PF (per Cor. 3. Prop. 11. lib. 2.) ergo cum puncta Q, P sint in oppositis sectionibus recta FB bifariam secat angulum QFP per 3. 6. Cum vero sint in eadem sectione, ducatur a puncto P recta ipsi QF parallela occurrens ipsi FB in R, & erit QF ad PR, ut QB ad PB, sive QF ad PF ut prius, ergo æquales sunt PR, PF, ideoque angulus BFP æqualis est angulo PRF sive angulo alterno BFK, ergo recta FB bifariam secat angulum KFP qui angulo QFP est deinceps. *Q. E. D.*

Fig. 18. Cor. I. Hinc, datis tribus punctis P, Q, V, in sectione conica & foco ejus F; inveniri potest axis per focum transiens positione & magnitudine. Jungantur enim puncta P, Q, & ducantur FP, FQ & recta FR bifariam secans angulum, qui deinceps est angulo PFQ, & occurrens ipsi QP productæ in B, erit punctum B in directrice; & similiter junctis duobus aliis punctis Q, V, inveniatur aliud punctum in directrice, & ducatur directrix DX; tum a foco & puncto in sectione P dimittantur ad directricem perpendiculares FD, PN; secetur FD ita in A, ut FA sit ad AD, ut

ut PF ad PN: erit A vertex axis (11. lib. 2.) & si æquales sint FA, AD, sectio erit Parabola; si vero non, sumatur SF ad SD, ut FA ad AD, erit S alter vertex axis; & si FA major sit ipsâ AD, punctum S sumendum est ad eas partes foci ad quas est punctum A, ad partes autem contrarias, si FA sit minor ipsâ AD, & in priore casu sectio erit Hyperbola, et in posteriore Ellipsis.

Cor. II. Hinc etiam, datâ positione directrice DX, et datis foco F huic directrici propiore et puncto in sectione E; patet methodus ducendi rectam quæ sectionem contingat in puncto E; per puncta E, F ducatur recta EFO, & huic perpendicularis ducatur FB occurrens directrici in B, erit juncta EB contingens; nam si non, occurrat EB sectioni iterum in T, & juncta TF producatur ad Y; per hanc Prop. recta FB bifariam secat angulum EFY qui deinceps est angulo EFT, ergo angulus YFB æqualis est angulo EFB hoc est angulo OFB, quod est absurdum: similiter in Fig. 17. ostendetur rectam EB non iterum occurrere sectioni vel sectioni oppositæ, ergo EB est contingens. Si vero ipsa EFO sit directrici perpendicularis, recta per E ducta, parallela directrici, erit contingens, ut patet. Fig. 18.

Cor. III. Hinc si recta EB contingens sectionem occurrat directrici ejus DX in B, & a contactu E ducatur EF ad focum ipsi DX propiorem; erit juncta FB perpendicularis ipsi EF; nam si non, ducatur perpendicularis occurrens directrici in N, juncta EN erit quoque contingens per. Cor. præced. quod est absurdum.

Cor. IV. Hinc, si recta quævis EG jungens contactus duarum contingentium BE, BG transeat per focum F; recta FB a foco ad concursum contingentium ducta erit perpendicularis jungenti contactus. Nam sit DX directrix ipsi F propior, & sit A vertex axis transversi inter F & rectam DX, tum quia puncta F, A, D posita sunt & recta DX ducta est ut in Prop. 5. hujus dictum fuit, & EG transit per F, punctum B concursus contingentium erit in directrice DX; ergo FB est ipsi EG perpendicularis per Cor. præcedens.

PROP

PROP. X.

Fig. 17. 18. Si duæ rectæ HP, HQ contingant ſectionem conicam vel ſectiones oppoſitas; recta HF, quæ per concurſum contingentium & alterum focorum F ducitur, biſariam ſecabit angulum QFP, comprehenſum rectis, quæ a punctis contactus ad eundem focum ducantur, cum rectæ HP, HQ contingunt eandem ſectionem, angulum vero KFP qui deinceps eſt angulo QFP, cum contingunt ſectiones oppoſitas.

SIT recta DX directrix ſectionis foco F propior, cui jungens contactus QP occurrit in B, et axis in D, & ſit A vertex axis inter F et D; per H concurſum contingentium ducatur diameter occurrens ipſi QP in L, et ſit vertex ejus V, occurrat recta HF ſectioni in E; et quoniam in Ellipſi aut Hyperbola quarum centrum ſit C, CF, CA, CD, & etiam CH, CV, CL, ſunt proportionales, & in Parabola FA, AD et etiam LV, VH ſunt æquales, et rectæ DX, LP ſunt ordinatis diametorum DF, HL parallelæ, et recta HF tranſit tam per punctum F, quam per punctum H, prout hæc recta ſectioni iterum occurat in G, vel ſolummodo in E, (cum ſit aſymptoto parallela,) contingens per E ducta occurret vel contingenti ductæ per G vel aſymptoto ipſi HF parallelæ, tam ad rectam DX, quam ad rectam QP (per 5 & 6. hujus) ergo contingens ducta per E occurret directrici in B; igitur juncta FB erit perpendicularis ipſi EFG (per Cor. 3. præced.) ergo anguli EFB, GFB ſunt æquales; ſed (productâ QF ad K) erit in Fig. 18. angulus PFB æqualis KFB; (per Prop. præc.) igitur angulus PFG eſt æqualis angulo EFK ideoque angulo QFG, & ſimiliter in Fig. 17. quoniam anguli PFB, QFB ſunt æquales, angulus PFG eſt æqualis angulo QFE ideoque angulo KFG: ergo conſtat propoſitum. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XI.

Si duæ ſectiones conicæ, ſe invicem in uno puncto contingant (hoc eſt ſi in eodem puncto communem habeant contingentem) in tribus aliis punctis non occurrrent.

OCCURRANT ſibi invicem duæ ſectiones in puncto A & utraſque ſectiones contingat in hoc puncto recta GA; hæ ſectiones non occurrent in tribus punctis præter A. Fig. 19.

Nam ſi fieri poteſt, occurrant ſibi invicem in punctis B, C, D, jungantur hæc puncta tribus rectis, & primo ſit nulla ex iis ipſi GA parallela, producatur una ex his rectis BC ut occurrat ipſi GA in G, & a reliquo puncto communi D ducatur recta parallela communi contingenti GA, occurrens ipſi GBC in N & ſectionibus in punctis O, P; tum utrumque rectangulum DNO, DNP erit ad quadratum ex GA, ut rectangulum CNB ad rectangulum BGC (per Cor. 3. 18. lib. 1.) ergo rectangula DNO, DNP ſunt æqualia, & proinde puncta P, et O, coincidunt: ergo ſectiones in quinque punctis ſibi invicem occurrunt, contra Cor. 3. 56. lib. 1. Vel ſi recta DN contingat unam ſectionem in D, & alteri iterum occurrat in O, eodem modo oſtendetur quadratum ex DN æquale eſſe rectangulo DNO, quod eſt abſurdum. Vel ſi recta DN utraſque ſectiones contingat in D, quoniam eſt parallela contingenti GA, juncta DA eſſet diameter utriuſque ſectionis & ergo ſi a puncto communi B ducatur recta ordinatim applicata communi diametro DA, alter terminus hujuſce ordinatæ erit utrique ſectioni communis & proinde ſectiones in qninque punctis ſibi invicem occurrunt, quod fieri nequit.

Si vero CD, jungens duo puncta utrique ſectioni communia, ſit parallela communi contingenti GA; tum recta per contactum

A ducta bifariam secans ipsam CD in L esset utriusque sectionis diameter; si ducatur igitur a reliquo puncto communi B, recta ordinatim applicata diametro AL, terminus alter hujusce ordinatæ erit in utraque sectione, et proinde hæ sectiones in quinque punctis occurrunt, quod fieri nequit. Constat igitur propositum.

PROP. XII.

Si duæ sectiones conicæ se invicem in duobus punctis contingant; in alio puncto non sibi invicem occurrent.

Fig. 20.

CONTINGANT se invicem duæ sectiones conicæ in punctis A, B, & primo, occurrant sibi invicem in G communes contingentes per A & B ductæ, per occursum contingentium ducatur recta GF junctam AB bifariam secans, erit hæc diameter utriusque sectionis (26. lib. 1.) si igitur hæ sectiones aliud habeant punctum commune D, ducatur recta DL ordinatim applicata communi diametro GF, alter terminus hujusce ordinatæ L erit in utraque sectione, & proinde hæ sectiones se invicem contingentes in puncto A, in tribus aliis punctis B, D, L, sibi invicem occurrerent contra præcedentem: vel si punctum C in diametro GF esset utrique sectioni commune, tum recta per C ducta ipsi BA parallella, utramque sectionem in puncto C contingeret (Cor. 8. 25. lib. 1.) occurrat hæc contingens contingenti GB in E; tum recta EH per E ducta bifariam secans junctam BC erit communis diameter utriusque sectionis, & si igitur a reliquo puncto communi A ducatur ad hanc diametrum ordinatim applicata, terminus ejus alter erit in utraque sectione contra præcedentem, ut prius: ergo nullum est punctum sectionibus commune præter puncta contactus A, B.

Secundo si communes contingentes per A & B ductæ sint parallelæ; erit juncta AB utriusque sectionis diameter, si igitur haberent aliud punctum

punctum commune præter puncta contactus, tum ab hoc puncto communi, ductâ ad communem diametrum ordinatim applicatâ, ut prius ostendetur sectiones habere quartum punctum commune contra præcedentem; ideoque in omni casu duæ sectiones se invicem in duobus punctis contingentes in alio puncto non sibi invicem occurrent. *Q. E. D.*

PROP. XIII.

Si circulus sectionem conicam vel sectiones oppositas in duobus punctis contingat; recta jungens contactus erit axi sectionis ordinatim applicata.

Et si ordinatim sit applicata axi sectionis qui in Ellipsi & Hyperbola est transversus, circulus cadet totus intra sectionem; si vero sit ordinatim applicata axi secundo Ellipseos aut Hyperbolæ; circulus cadet totus extra Ellipsim, vel extra utramque Hyperbolam.

CUM circulus contingat in duobus punctis Ellipsim aut oppositas Hyperbolas, si communes contingentes sint parallelæ, recta jungens contactus, erit tam sectionis, quam circuli diameter, et quia propter circulum, hæc diameter est contingentibus perpendicularis erit axis sectionis conicæ, ut patet ex Cor. 2. 7. lib. 2. et si sit axis tranversus, circulus cadet totus extra Ellipsim vel utramque Hyperbolam, vel si sit axis secundus Ellipseos, circulus cadet totus intra Ellipsim, per Prop. 8. lib. 2.

Pars. 1. Si vero circulus HRET contingat sectionem vel oppositas sectiones in punctis T, R, & communes contingentes per hæc puncta ductæ sibi invicem occurrant in S, erit juncta TR axi sectionis ordinatim applicata. Nam per S occursum contingentium ducatur recta bifariam secans ipsam TR in O; tum quia (propter circulum) contingentes ST, SR sunt æquales, recta SO erit ipsi FIG. 21. 22.

TR perpendicularis: sed recta SO, est diameter sectionis conicæ (26. lib. 1.) & hæc diameter est axis, quoniam rectam TR ei ordinatim applicatam ad angulos rectos secat. Ergo constat prima pars propositi.

Pars. II. Si circulus HTER contingat sectionem conicam in punctis T & R, & juncta TR sit ordinatim applicata axi AB qui in Ellipsi & Hyperbola est transversus; erit circulus totus intra sectionem; centrum hujusce circuli P erit in axe AB, ut patet; sit B vertex axis ipsi P propior & occurrat circulus axi AB in puncto E ad eas partes centri P ad quas est B, erit PE ipsâ PB minor. Ducatur enim per verticem axis B, contingens BL & per punctum R ducatur recta circulum & sectionem contingens, occurrens contingenti BL in L; et quoniam in Ellipsi aut Hyperbola axis secundus, qui est contingenti BL parallelus, minor est diametro contingenti RL parallelâ, erit BL minor ipsâ RL (Cor. 31. & Cor. 1. 40. lib. 1.) & in Parabola BL minor est ipsâ RL (per Cor. 1. 3. lib. 2. & Cor. 3. 3. lib. 3.) jungantur igitur PL, PR, et quoniam RL circulum contingit, erit angulus PRL rectus, est autem angulus PBL rectus; igitur, propter communem hypothenusam, quadrata ex PB, BL simul æqualia sunt quadratis ex PR, RL simul: sed quadratum ex BL minus est quadrato ex RL, ergo quadratum ex PB majus est quadrato ex PR: ergo ipsa recta PB major est ipsâ PR, hoc est ipsâ PE; ergo arcus circuli TER occurrit axi intra sectionem, & proinde totus iste arcus est intra sectionem, aliter circulus occurreret sectioni in alio puncto præter puncta contactus (contra præced.) & cum manifestum est circulum occurrere axi AB iterum in H puncto intra sectionem, erit totus arcus THR, & proinde totus circulus intra sectionem. Eodem prorsus modo ostendetur circulum cadere totum extra Ellipsim, cum TR jungens puncta contactus sit ordinatim applicata axi secundo.

Quoniam circulus contingens oppositas Hyperbolas totus est intra angulum contentum communibus contingentibus, patet eum esse totum extra utramque Hyperbolam. *Q. E. D.*

Cor.

Cor. I. Si recta quævis TS ſectionem conicam contingat, et a puncto contactus erigatur perpendicularis ad contingentem occurrens axi tranſverſo ſectionis in P, erit ipſa PT recta minima quæ ab eodem puncto P, duci poteſt ad ſectionem; vel ſi occurrat axi ſecundo Hyperbolæ aut Ellipſeos in puncto Q, erit in Hyperbola recta QT minima, & in Ellipſi maxima, quæ ab eodem puncto Q duci poteſt ad ſectionem, ſciz. ad eandem partem axis. Ducatur enim a puncto T ad axem tranſverſum, recta ei ordinatim applicata, occurrens ſectioni iterum in R, & huic axi occurrat contingens TS in S; erit juncta SR contingens (Cor. 2. 26. lib. 1.) & æqualis ipſi ST, & erit juncta PR æqualis ipſi PT: ergo mutuo æquiangula ſunt triangula PTS, PRS & proinde angulus PRS eſt rectus; igitur circulus centro P deſcriptus tranſiens per puncta T & R contingет rectas ST, SR & proinde ſectionem in punctis T, & R, & igitur iſte circulus cadet totus intra ſectionem, (per hanc Prop.) et ergo radius circuli PT eſt minima recta, quæ a puncto P duci poteſt ad ſectionem ſciz. ad eandem partem axis. Eodem prorſus modo, cum perpendicularis ad contingentem TS occurrat axi ſecundo Hyperbolæ aut Ellipſeos in Q, oſtendetur circulum radio QT deſcriptum cadere totum extra Hyperbolas aut Ellipſim, ergo conſtat corollarium.

Cor. II. Si recta TR Ellipſi aut Hyperbolâ terminata ſit axi ejus AB ordinatim applicata, et circulus tranſiens per puncta T et R, contingat ſectionem in uno puncto T, eam quoque continget in altero puncto R; nam circuli centrum P, erit in axe ſectionis AB; ducatur per T communis contingens TS axi AB occurrens in S, angulus PTS (propter circulum) erit rectus, et juncta SR ſectionem continget, junctâ igitur PR, oſtendi poteſt, ut in Cor. præc. quod angulus PRS ſit rectus: ergo circulus continget, rectam RS ac proinde, ipſam ſectionem in puncto R.

PROP.

PROP. XIV.

Fig. 21, 22. Si duo circuli contingant Ellipsim aut Hyperbolam in eodem puncto T & iterum contingant eandem Ellipsim vel oppositas Hyperbolas in punctis R, N; rectangulum contentum diametris circulorum erit æquale quadrato quod fit ex diametro sectionis quæ est conjugata diametro per T punctum contactus transeunti. Et si circulus contingat Parabolam in duobus punctis, quadratum ex ejus diametro erit æquale rectangulo contento parametro axis & parametro diametri per punctum contactus transeuntis.

Pars 1. SINT Ellipseos aut Hyperbolarum axes AB, M*m* & centrum C, rectæ TR, TN jungentes puncta contactus erunt axibus perpendiculares per part 1. Prop. præc. per punctum T in quo uterque circulus sectionem contingit ducatur communis contingens axibus occurrens in punctis G, S, & ad punctum T erigatur huic contingenti perpendicularis axibus occurrens in P, Q. erunt puncta P, Q centra circulorum (per 1. & 19. 3.) & quoniam diametri sectionis per contactus transeuntes sunt inter se æquales, erunt ipsarum conjugatæ inter se æquales ut constat ex Prop. 3. & 4. lib. 4. Sit FD diameter sectionis conjugata ei quæ per contactum T transit. Quoniam rectangula triangula TQG, TSP sunt æquiangula, erit QT ad GT, ut TS ad TP, ideoque rectangulum QTP est æquale rectangulo GTS, hoc est, quadrato ex CD per Prop. 51. lib. 1. unde liquet pars prima propositionis.

Pars 2. Contingat circulus HE Parabolam in punctis T, R erit juncta TR axi Parabolæ perpendicularis ut prius, ideoque parametri diametrorum quæ per puncta contactus transeunt erunt inter se æquales (Cor. 3. 25. lib. 2.) per contactum T ducatur communis

communis contingens axi occurrens in S & ad punctum T erigatur huic contingenti perpendicularis axi occurrens in P, erit P centrum circuli HE ut prius; occurrat ipſa TR axi Parabolæ in O, & quoniam rectangula triangula OPT, SPT ſunt æquiangula erit OP ad PT, ut PT ad PS, ergo quadratum ex PT eſt æquale rectangulo OPS, hoc eſt, rectangulo contento dimidio parametri axis & dimidio parametri diametri quæ per contactum T tranſit (Prop. 25. lib. 2.) ergo conſtat pars ſecunda propoſitionis.

Cor. I. Manentibus quæ in caſu primo hujus poſita fuerunt, ſemidiameter PT circuli Ellipſim aut Hyperbolam contingentis in duobus punctis & intra ipſam cadentis erit ad CD ſemidiametrum ſectionis conjugatam ei quæ per contactum tranſit, ut CM ſemiaxis ſecundus ad CB ſemiaxem tranſverſum; ducatur enim a centro recta CK perpendicularis ad contingentem GT, erit rectangulum PT in CK æquale quadrato ex CM (per 22. lib. 2.) & rectangulum CD in CK eſt æquale rectangulo MCB contento ſemiaxibus ut conſtat ex Prop. 1. lib. 4. ergo PT eſt ad CD ut quadratum ex CM ad rectangulum MCB, hoc eſt, ut CM ad CB. Erit ergo, per hanc Propoſitionem, CD ad QT (ſemidiametrum circuli contingentis Ellipſim aut oppoſitas Hyperbolas in duobus punctis & extra ipſas cadentis) in eadem ratione ſciz. ut CM ad CB.

Cor. II. Hinc patet quod diametri horum circulorum erunt inter ſe æquales, ſi contingant, ut in propoſitione, Hyperbolas æquilateras ſciz. quarum axes ſunt inter ſe æquales.

PROP.

PROP. XV.

Si a vertice axis transversi Ellipseos, aut Hyperbolæ, vel axis Parabolæ, ponatur in axe recta ipsius parametro æqualis; circulus circa hanc tanquam diametrum descriptus cadet totus intra sectionem: si vero a vertice axis minoris Ellipseos ponatur recta ipsius parametro æqualis, circulus hac diametro descriptus cadet totus extra sectionem.

Fig. 23, 24, 25, 26. SIT AB axis transversus Ellipseos aut Hyperbolæ, vel axis Parabolæ, & ponatur in axe recta AC ipsius parametro æqualis; circulus circa diametrum AC descriptus cadet totus intra sectionem; vel si AB fuerit axis minor Ellipseos cadet circulus totus extra sectionem.

Ducatur enim AD axi perpendicularis ipsique AC æqualis & jungatur CD, & in Ellipsi & Hyperbola jungatur etiam BLD, in Parabola vero ducatur DL axi parallela; & per quodvis in circulo punctum E ducatur EF ipsi AD parallela sectioni occurrens in G, ipsis autem AB, CD, LD occurrens in punctis F, K, H. Quoniam igitur æquales sunt AC, AD, æquales erunt FC, FK, & propter circulum est quadratum ex EF æquale rectangulo AFC, hoc est, ipsi AFK; propter sectionem vero est quadratum ex GF æquale rectangulo AFH (sciz. per Propp. 1. 4. 5. lib. 2.) est autem KF minor ipsâ FH, si AB non sit axis minor Ellipseos in quo casu est KF major ipsâ FH, quare est rectangulum AFK minus ipso AFH, in primo casu, ideoque quadratum ex EF minus erit quadrato ex GF, & recta EF minor ipsâ GF & propterea est circulus totus intra sectionem: et similiter in altero casu ostendetur circulum esse totum extra eandem. *Q. E. D.*

Cor.

Cor. I. Hinc, si a puncto A vertice axis, qui in Ellipsi & Hyperbola est transversus, ponatur in axe & intra sectionem recta AP, non major quam dimidium ipsius AC parametri ejusdem axis, erit PA minima omnium rectarum, quæ ab eodem puncto P duci possunt ad sectionem. Si vero a vertice axis minoris Ellipseos ponatur recta AP, non minor quam dimidium parametri ejusdem axis, erit PA maxima omnium rectarum, quæ ab eodem puncto P duci possunt ad sectionem. Nam in priore casu quoniam circulus radio PA descriptus non cadit extra circulum AEC, erit totus intra sectionem; & quoniam hic circulus in posteriore casu non cadit intra circulum AEC erit totus extra sectionem, unde in utroque casu constat propositum.

Cor. II. Hinc, si in AB axe sectionis conicæ (qui in Ellipsi aut Hyperbola est transversus) detur punctum P cujus distantia a vertice propiore axis B est major dimidio ipsius parametri, patet methodus ducendi rectam a puncto P, quæ sit minima omnium rectarum quæ ab eodem puncto duci possunt ad sectionem sciz. ad eandem partem axis. Fig. 21, 22.

Cum sectio sit Parabola ponatur in axe recta PO, versus verticem axis B, æqualis dimidio parametri axis, & cum sectio sit Ellipsis aut Hyperbola ponatur in axe a centro C recta CO versus verticem axis B ita ut CO sit ad PO, ut axis AB ad ipsius parametrum, & in omni sectioni ducatur per punctum O recta axi perpendicularis sectioni occurrens in T, erit juncta PT recta ducenda. Nam per punctum T ducatur recta sectionem contingens, erit recta PT huic contingenti perpendicularis, ut constat ex part. 1. Prop. 25. & Prop. 24. lib. 2. ergo recta PT est minima rectarum quæ a puncto P duci possunt ad sectionem sciz. ad eandem partem axis per Cor. 1. Prop. 13. hujus.

Et si in axe secundo Hyperbolæ detur punctum Q ad quamlibet distantiam a centro, eâdem prorsus methodo ducenda est recta QT

quæ ſit minima rectarum quæ ab eodem puncto duci poſſunt ad eandem ſectionem. Vel ſi in axe ſecundo Ellipſeos detur punctum Q cujus diſtantia a vertice remotiore axis M minor eſt dimidio ipſius parametri, eâdem prorſus methodo ducenda eſt recta QT quæ ſit maxima rectarum quæ ad eandem partem axis duci poſſunt a puncto Q ad ſectionem.

DEFINITIO IV.

SI circulus ſectionem conicam in quovis puncto ita contingat ut inter ipſum et ſectionem nullus alius circulus tranſire poteſt; hic circulus dicitur habere *eandem Curvaturam* cum ſectione in puncto contactus; vel dicitur ſectionem in iſto puncto *Oſculari.*

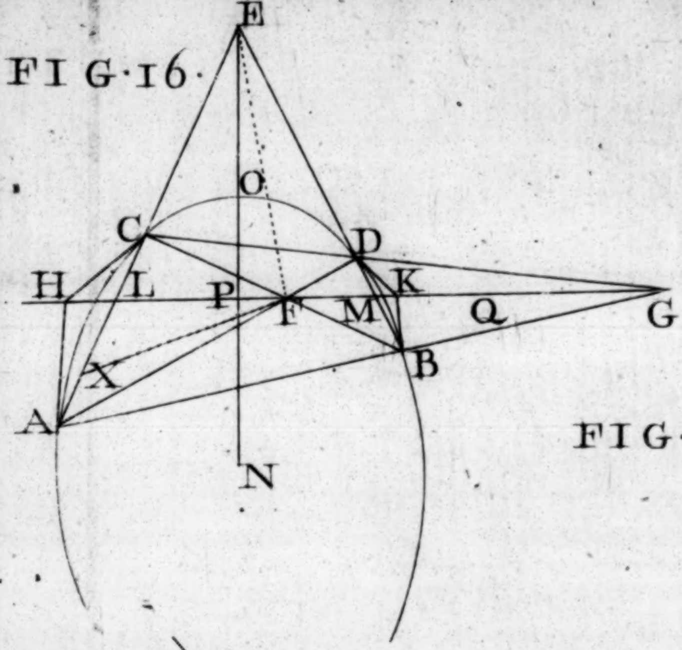
PROP. XVI.

Fig. 27, 28. A puncto C in ſectione conica ducatur ad axem ejus AH (qui in Ellipſi aut Hyperbola ſit tranſverſus) recta ipſi ordinatim applicata ſectioni rurſus occurrens in B, & a puncto B ducatur diameter BK, & a primo puncto C ducatur recta huic diametro ordinatim applicata ſectioni rurſus occurrens in R; ſi deſcribatur circulus CRP ſectionem contingens in C, & tranſiens per punctum R; hic circulus eandem habebit curvaturam cum ſectione in puncto contactus C.

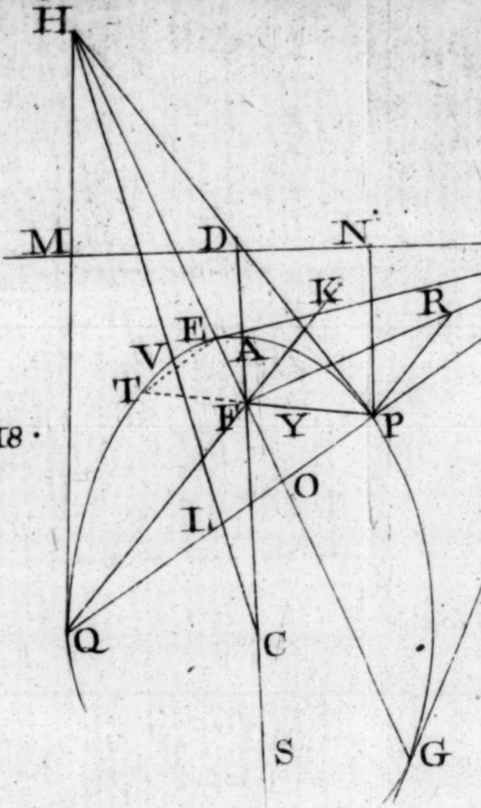
DUCATUR per contactum C communis contingens, axi ſectionis occurrens in A, & per punctum B ducatur recta ſectionem contingens, hæc occurret alteri contingenti in A ad axem (Cor. 2. 26. lib. 1.) & erunt AC, AB æquales ut patet.

Dico

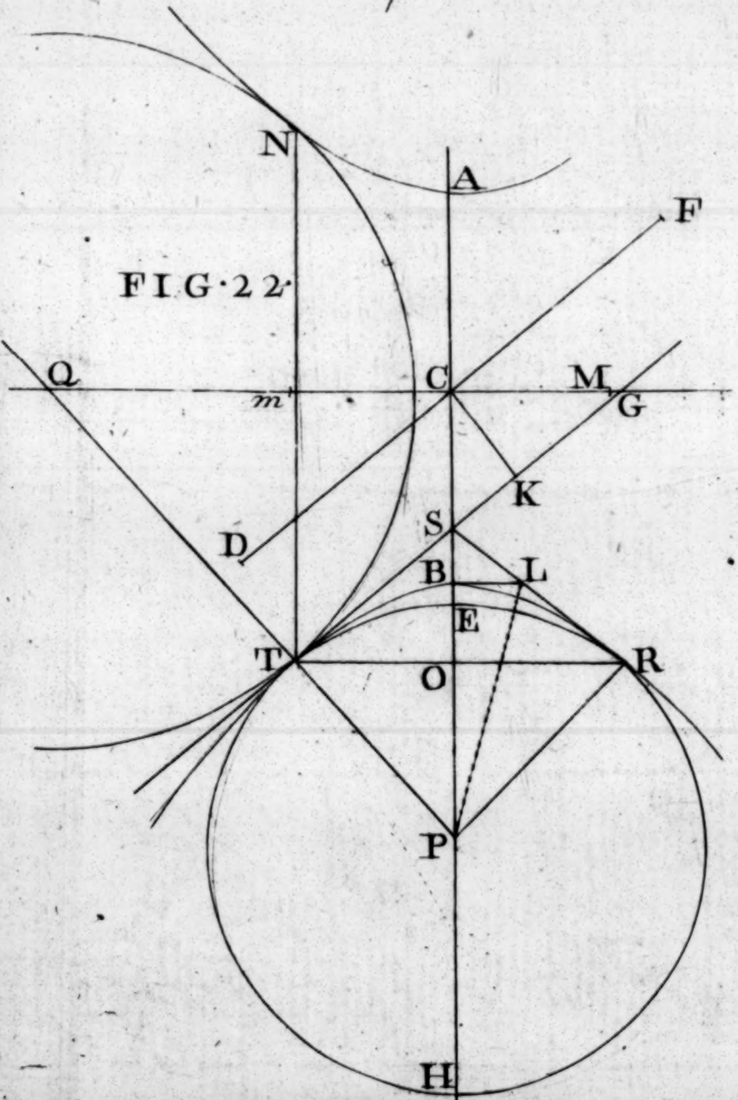
FIG·16·



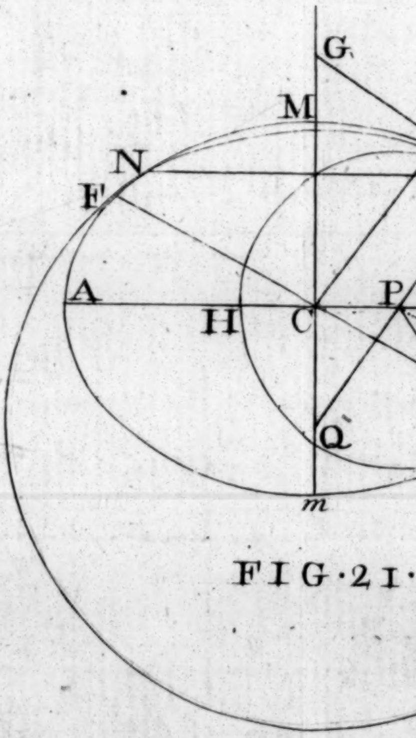
FIG·18·

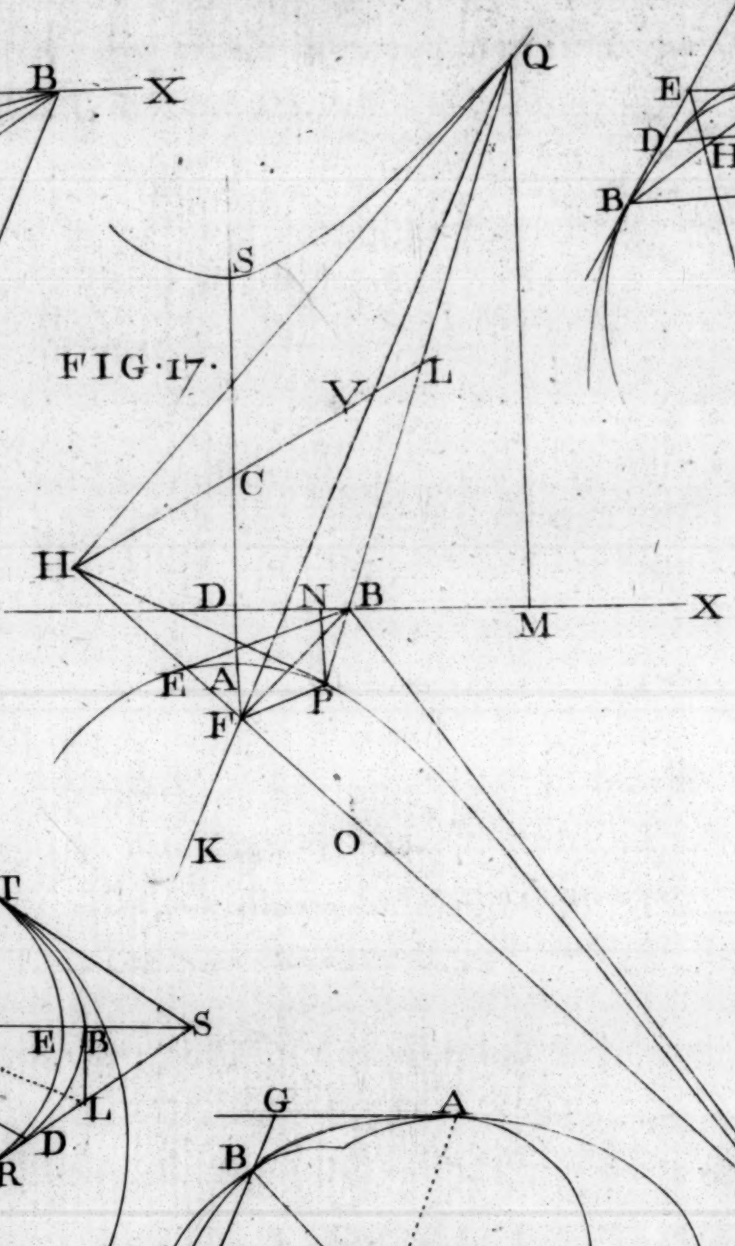


FIG·22·

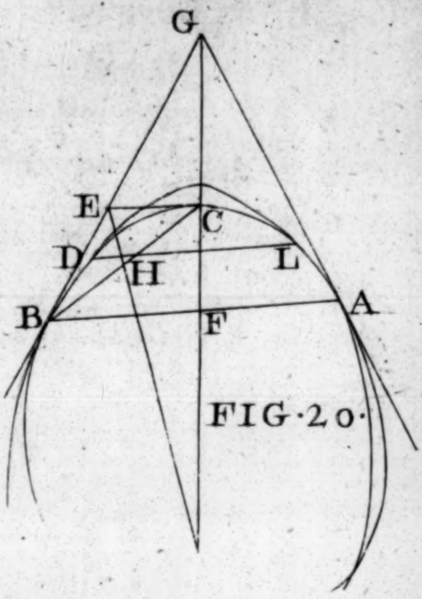


FIG·21·

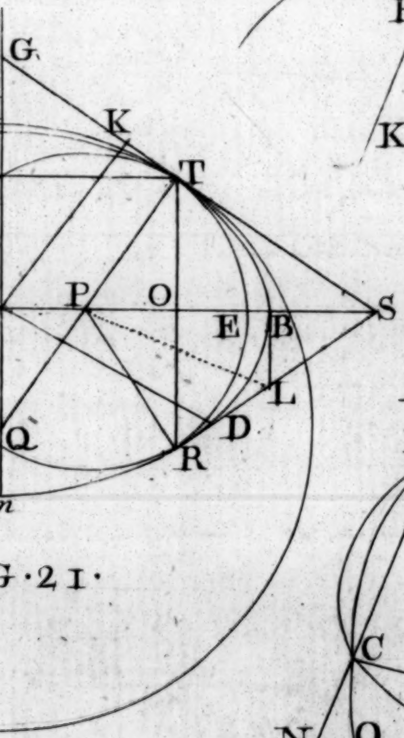




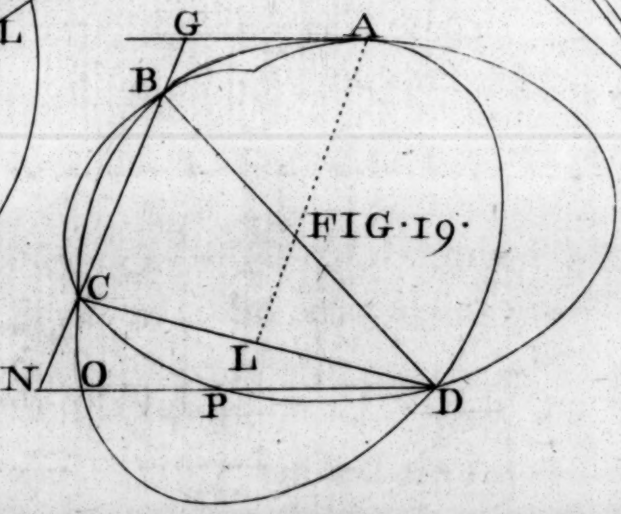
FIG·17·



FIG·20·



G·21·



FIG·19·

Dico imprimis circulum CRP ſectioni non occurrere niſi in punctis C & R, & eſſe ex una parte rectæ CR extra & ex altera parte intra ſectionem. Nam nequit ei occurrere in puncto B, quia tum in iſto puncto eam contingeret (per Cor. 2. 13. huj.) & proinde non occurreret ſectioni in tertio puncto R (per 12. huj.) & pari ratione nequit occurrere Ellipſi in altero vertice diametri BK, nam juncta CK eſt alteri axi ordinatim applicata. Sed ſi fieri poſſit, ſectioni occurrat in punctis C, R & O, ducatur recta per O parallela ipſi BA occurrens ſectioni in N, et ipſi AC in L; erit propter ſectionem (18. lib. 1.) rectangulum OLN ad quadratum ex LC, ut quadratum ex BA ad quadratum ex AC, hoc eſt in ratione æqualitatis, et igitur quoniam O eſt in circulo, quem LC contingit in C, erit etiam N in eodem circulo; et ergo circulus CRP occurrit ſectioni in tribus punctis R, O, N præter punctum contactus C, contra Prop. 11. hujus; ergo circulus CRP non niſi in punctis C, R ſectioni occurrit; et quoniam non contingit ſectionem in R (tum enim eſſet CR axi ordinatim applicata per partem primam Propoſitionis 13. hujus, contra hypotheſin) erit arcus iſtius circuli ex una parte rectæ CR totus extra, et ex altera totus intra ſectionem.

Si nunc deſcribatur quivis alius circulus, ut COS, ipſo CRP minor, contingens circulum CRP et ſectionem in C, cadet intra ſectionem ad utraſque partes puncti contactus C. Nam ſi iſte circulus tranſeat per B, ſectionem ibi continget, et proinde erit totus intra ſectionem (part. 2. Prop. 13. huj.) occurrat vero ipſi CB extra ſectionem in S; et quoniam circulus COS eſt totus intra circulum CRP, cadet neceſſario ex una parte contactus C intra ſectionem; ſit igitur arcus CM intra ſectionem, et cum punctum S eſt extra ſectionem arcus MS occurret ſectioni alicubi ut in O; ducatur per O recta, ipſi BA parallela, occurrens ſectioni in N, et ipſi AC in L; deinde oſtendetur ut prius, quod rectangulum OLN eſt æquale quadrato ex contingente LC, et proinde quod punctum FIG. 27.

N est in circulo COS; iste vero circulus non continget sectionem in N (12. huj.) quia eam contingit in C & ei occurrit in punctis N, O; cum igitur arcus SN sit ad unam partem puncti N extra sectionem erit arcus NC ad alteram partem puncti N, intra sectionem; ideoque erit totus iste arcus NC intra sectionem: nam aliter circulus COS occurreret sectioni in alio puncto præter puncta C, O, N contra Prop. 11. hujus: ergo circulus minor ipso CRP cadit ad utrasque partes puncti contactus C intra sectionem.

Fig. 28. Si nunc describatur circulus CSOX major ipso CRP, contingens circulum CRP & sectionem in C, cadet ad utrasque partes puncti contactus C extra sectionem. Nam quoniam est totus extra circulum CRP, erit necessario ad unam partem puncti C extra sectionem; sit igitur arcus ejus CXM extra sectionem occurrens rectæ CR productæ in M, hic circulus CSOX, Parabolæ vel Hyperbolæ (quarum curvæ sunt infinitæ) alicubi occurret inter M & C, puta in O; & in Ellipsi, quoniam CB est ordinata ad axem majorem, erit CK ordinata ad axem minorem: si igitur circulus CSOX non occurrat ipsi CK intra sectionem, cadet totus extra Ellipsim (per part. 2. Prop. 13. huj.) occurrat igitur ipsi CK intra Ellipsim in S, & cum punctum M sit extra Ellipsim, arcus MS Ellipsi occurret alicubi ut in O; ducatur igitur per punctum O in omni sectione, recta parallela ipsi BA occurrens sectioni in N & ipsi AC in L, deinde ostendetur, ut prius, punctum N esse in circulo CSOX, ergo quoniam iste circulus contingit sectionem in C eam non iterum continget in puncto N vel O (per Prop. 12. huj.) quoniam igitur punctum M est extra sectionem, erit arcus MO extra sectionem, & proinde arcus OSN intra eandem, ideoque arcus NC ad alteram partem puncti N erit extra sectionem & quoniam circulus CSOX non occurrit sectioni nisi in punctis C, N, O (11. huj.) erit totus arcus NC extra sectionem: ergo circulus CSOX cadit ad utrasque partes puncti C extra sectionem.

Quoniam

Quoniam igitur circulus CRP contingens ſectionem in puncto C cadit ad unam partem iſtius puncti extra, & ad alteram partem intra ſectionem; & quivis alius circulus ſectionem in puncto P contingens cadit ad utraſque partes iſtius puncti vel intra vel extra ſectionem, patet nullum circulum tranſire poſſe inter ſectionem & circulum CRP; ergo circulus iſte eandem habet curvaturam cum ſectione in puncto C per Definitionem præcedentem.

LEMMA II.

CONTINGAT recta DS circulum in D & per punctum C intra circulum ducatur recta CX parallela contingenti DS; ſi a puncto D ducantur duæ rectæ circulo iterum occurrentes in M, K & rectæ CX in C, V, erunt rectangula MDC, KDV æqualia. FIG. 29.

Occurrat enim circulo recta CX in Y, et jungantur DY, MY, & in triangulis DYM, DCY erit angulus ad D communis, & angulus CYD æqualis eſt angulo alterno YDS, hoc eſt angulo DMY in ſegmento alterno (32. 3.) ideoque triangula DYM, DCY ſunt mutuo æquiangula; eſt ergo MD ad DY, ut DY ad DC (4. 6.) ideoque rectangulum MDC, æquale eſt quadrato ex DY: eodem modo oſtendetur (junctâ KY) rectangulum KDV eſſe æquale quadrato ex eadem DY; ergo conſtat propoſitum.

PROP.

PROP. XVII.

Si per quodvis punctum in ſectione conica ducatur recta ipſam contingens, & deſcribatur circulus hanc rectam in eodem puncto contingens, & abſcindens a diametro per hoc punctum ducta, ſegmentum ipſius parametro æquale; iſte circulus eandem habebit curvaturam, quam ſectio conica habet in puncto contactus.

Fig. 30. *Caſ.* 1. SIT AB axis ſectionis conicæ & per verticem ejus A ducatur contingens AD, erit angulus BAD rectus, ideoque ſi deſcribatur circulus ARC contingens rectam AD & ſectionem in A, centrum ejus erit in axe AB, & ſi iſte circulus abſcindat ſegmentum axis AC æquale ipſius parametro, erit totus intra ſectionem (vel extra eandem ſi AB ſit axis minor Ellipſeos) per Prop. 16. hujus; & igitur (cum AB non ſit axis minor Ellipſeos) circulus, contingens ſectionem in A & abſcindens ab axe ſegmentum ipſo AC minus, cadet totus intra ſectionem.

Si nunc circulus AHE abſcindat ab axe ſectionis conicæ ſegmentum AE ipſo AC majus; ſit centrum ejus P, & quoniam ſegmentum PA eſt majus dimidio parametri axis, duci poteſt a puncto P ad ſectionem recta PT vel P*t* ad utramque partem axis AB, quæ minor erit ipſâ PA (Cor. 2. Prop. 15. huj.) ergo circulus AHE circa diametrum AE deſcriptus occurret his rectis extra ſectionem productis, puta in punctis M, L, & quoniam idem circulus occurrit axi in E intra ſectionem, arcus ME neceſſario occurret ſectioni alicubi inter M & E, puta in H, & ſimiliter arcus LE ſectioni occurret in *h* inter L & E; & quoniam circulus iſte non occurrit ſectioni niſi in punctis A, H, *h* (11. huj.) arcus AMH, AL*h* erunt toti extra ſectionem, hoc eſt circulus

AMEL

AMEL, cadit ad utraſque partes puncti contactus C, extra ſectionem; quoniam igitur quivis circulus ſectionem in puncto A contingens cadit ad utraſque partes iſtius puncti vel intra circulum ARC vel extra ſectionem, patet nullum circulum tranſire poſſe inter ſectionem & circulum ARC; ergo circulus iſte, ſciz. qui ab axe AB abſcindit ſegmentum AC ipſius parametro æquale, eandem habet curvaturam cum ſectione in puncto A per definitionem præcedentem. FIG. 29.

Demonſtratio eſt prorſus eadem, cum punctum A eſt vertex axis minoris Ellipſeos; pro *Minor* legendo *Major*, & pro *intra extra*, et vice verſa.

Caſ. 2. Sit nunc Ellipſis aut Hyperbola, cujus axis tranſverſus eſt AB, & centrum C, & per punctum D non verticem axis ducatur recta DS ſectionem contingens & deſcribatur circulus DMK hanc rectam contingens in puncto D & abſcindens a diametro CD ſegmentum DM æquale ipſius parametro; habebit hic circulus eandem curvaturam cum ſectione in puncto D. FIG. 29.

Ducatur enim a puncto D ad axem tranſverſum ordinatim applicata DE, ſectioni iterum occurrens in F, per punctum F ducatur ſectionis diameter FCG, cui ordinatim applicata ſit DH, ſectioni rurſus occurrens in L & circulo in K. Ducatur diameter CQ ipſi DS parallela, occurrens ipſi DL in V, & ducatur ſemidiameter CR ipſi CF conjugata occurrens ipſi DS in S, & ei ordinatim applicata ſit TD: quoniam ſemidiametri CD, CF ſunt æquales, erunt ipſarum conjugatæ CQ, CR æquales; ſit PD dimidium ipſius MD parametri diametri DCM, et erit rectangulum PDC æquale quadrato ex ſemidiametro CQ, ſive quadrato ex CR, hoc eſt rectangulo SCT per 48, & 49. lib. 1. ſive rectangulo VDH, (propter CS, VD & CH, TD parallelas) quoniam igitur rectangula PDC, VDH ſunt æqualia, ipſorum dupla ſciz. rectangula MDC, LDV erunt æqualia: ſed rectangulum KDV eſt quoque æquale rectangulo MDC (per Lemma præcedens) et proinde æquales ſunt LD, KD, ergo puncta L, K, coincidunt; ergo quoniam circulus DKM ſectionem

tionem contingens in D transit per L, alterum terminum rectæ a puncto D ordinatim applicatæ diametro FG, hic circulus eandem habebit curvaturam cum sectione in D per Prop. præcedentem.

FIG. 31. Sit nunc sectio Parabola cujus axis est AB, & per punctum D, non verticem axis, ducantur recta DS Parabolam contingens, & diameter DG; describatur circulus DMK contingens rectam DS in D, & abscindens a diametro DG segmentum DM ipsius parametro æquale; habebit iste circulus eandem curvaturam cum Parabola in puncto D.

Ducatur enim a puncto D ad axem, ipsi ordinatim applicata, DE Parabolæ rursus occurrens in F, & ducatur per F diameter FH, cui a puncto D ordinatim applicata sit DH, Parabolæ rursus occurrens in L, & circulo in K, a vertice diametri FH ducatur ad diametrum DG recta FG, ipsi ordinatim applicata, erit hæc parallela contingenti DS, & occurrat ipsi DH in C. Quoniam igitur parametri diametrorum DG, FH, sunt æquales (Cor. 3. 25. lib. 2.) & abscissæ DG, FH sunt æquales (2. lib. 3.) erunt etiam ordinatæ DH, FG æquales, propter vero triangula DCG, FCH similia & ipsorum latera DG, FH æqualia, erit DC æqualis ipsi CH & proinde erit DC quarta pars totius DL; erit igitur rectangulum LDC æquale (quadrato ex DH, sive ex FG, hoc est propter Parabolam) rectangulo MDG; est etiam (per Lemma præcedens) rectangulum KDC æquale rectangulo MDG, ideoque ut prius, circulus DMK transibit per L, & proinde eandem habebit curvaturam cum Parabola in puncto D. *Q.E.D.*

COR. Hinc, si circulus DBF contingat Parabolam in duobus punctis D, F, & per contactum D describatur circulus DMO, eandem curvaturam habens cum Parabola in puncto D; parameter axis Parabolæ, diameter circuli DBF, parameter diametri DG, & diameter circuli curvaturæ, erunt continue proportionales. Erit juncta DF axi ordinatim applicata (13 huj.) cui occurrat in E, per

D

D ducatur recta Parabolam contingens axi occurrens in S, hæc quoque utrosque circulos continget; erigatur igitur a puncto D perpendicularis ipsi DS, axi occurrens in X, erit XD radius circuli contingentis Parabolam in D & F, & segmentum DM diametri DG a circulo curvaturæ abscissum, æquale erit parametro istius diametri; si igitur a centro hujusce circuli dimittatur perpendicularis NP ad ipsam DM, erit PD dimidium ipsius DM et proinde æqualis ipsi SX & erit EX dimidium parametri axis (Prop. 25. lib. 2.) sed EX est ad XD, ut XD ad XS, & ut XD ad XS, ita (ob similia triangula DXS, PDN) est PD sive XS ad ND, igitur totæ rectæ sciz. parameter axis Parabolæ, diameter circuli DBF, parameter diametri DG, & DO diameter circuli curvaturæ erunt continue proportionales.

PROP. XVIII.

Si circulus DMO contingens Ellipsim aut Hyperbolam in puncto D, eandem habeat curvaturam cum sectione in isto puncto; erit semidiameter ejus ND, ad sectionis semidiametrum CQ conjugatam ei quæ per punctum D transit, ut quadratum ex eadem CQ ad rectangulum ACZ contentum semiaxibus. FIG. 29.

SI circulus sectionem in vertice axis contingat, ejus diameter erit ejusdem axis parameter per Prop. 16. hujus, ergo in hoc casu manifesto constat propositum.

Si vero circulus DMO sectionem contingat in puncto D non vertice axis; per punctum D ducatur communis contingens DS, in hanc a centro sectionis dimittatur perpendicularis C*a*; sit DM segmentum diametri CD a circulo DMO abscissum, & in ipsam a centro istius circuli dimittatur perpendicularis NP, erit PD dimidium parametri diametri CD; est igitur rectangulum PDC æquale quadrato ex semidiametro CQ ipsi CD conjugata, propter vero

 triangula

triangula NDP, DC*a* similia, erit ND ad CD, ut PD ad C*a*, est igitur rectangulum ND in C*a* æquale (rectangulo PDC hoc est) quadrato ex CQ; est autem ND ad CQ, ut (rectangulum ND in C*a* hoc est) quadratum ex CQ, ad rectangulum CQ in C*a*, sed rectangulum CQ in C*a* est æquale rectangulo ACZ contento semiaxibus (1. lib. 4.) ideoque ND semidiameter circuli DMO est ad semidiametrum CQ, ut quadratum ex ipsa CQ ad rectangulum ACZ contentum semiaxibus. *Q. E. D.*

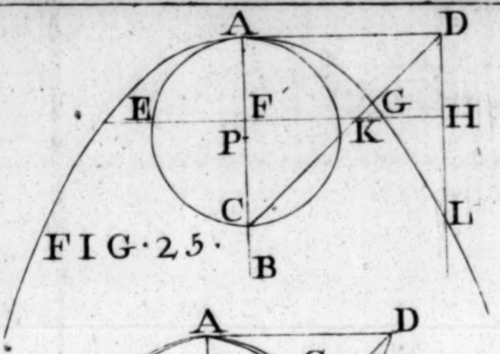
Cor. Quoniam in demonstratione hujus Prop. ostenditur rectangulum ND in C*a* æquale esse quadrato ex CQ, constat quod ND radius circuli curvaturæ, CQ semidiameter sectionis communi contingenti DS parallela, & C*a* perpendicularis a centro sectionis in hanc contingentem dimissa, sunt continue proportionales.

PROP. XIX.

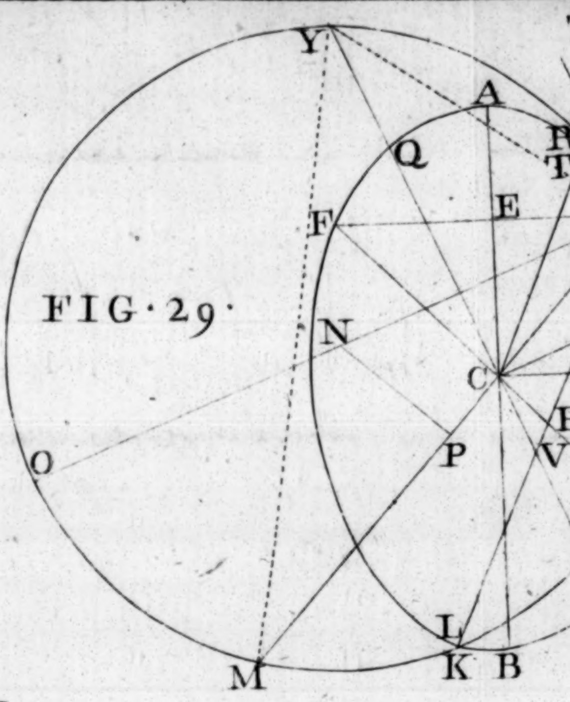
Fig. 32. Si recta secans sectionem conicam in duobus punctis D, F; occurrat duabus contingentibus AB, AC in punctis E, G & jungenti contactus BC in H; erit rectangulum DEF ad rectangulum FGD, ut quadratum ex EH ad quadratum ex GH.

PER punctum E, in quo secans uni contingentium AB occurrit, ducatur recta alteri contingenti AC parallela, occurrens rectæ jungenti contactus in M, & ducatur recta ipsi DF parallela contingens sectionem in L & occurrens contingenti AC in K; per Cor. Prop. 53. lib. 1. est rectangulum DEF ad quadratum ex EM, ut quadratum ex KL ad quadratum ex KC, hoc est, ut rectangulum FGD ad quadratum ex GC per Prop. 18. lib. 1. ergo, alternando, erit rectangulum DEF ad rectangulum FGD, ut quadratum ex

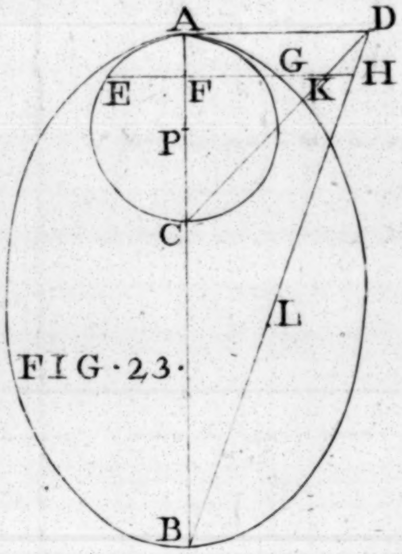
EM



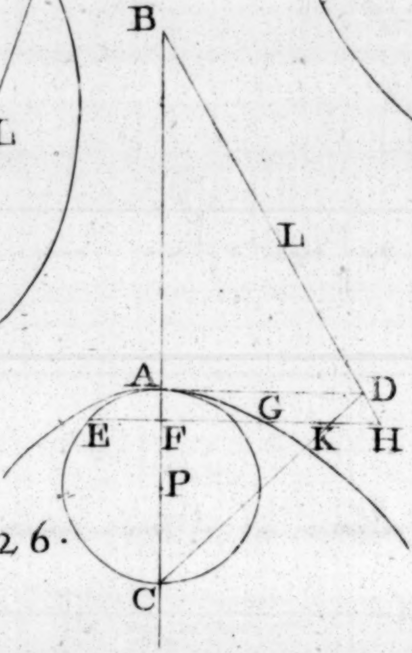
FIG·25·



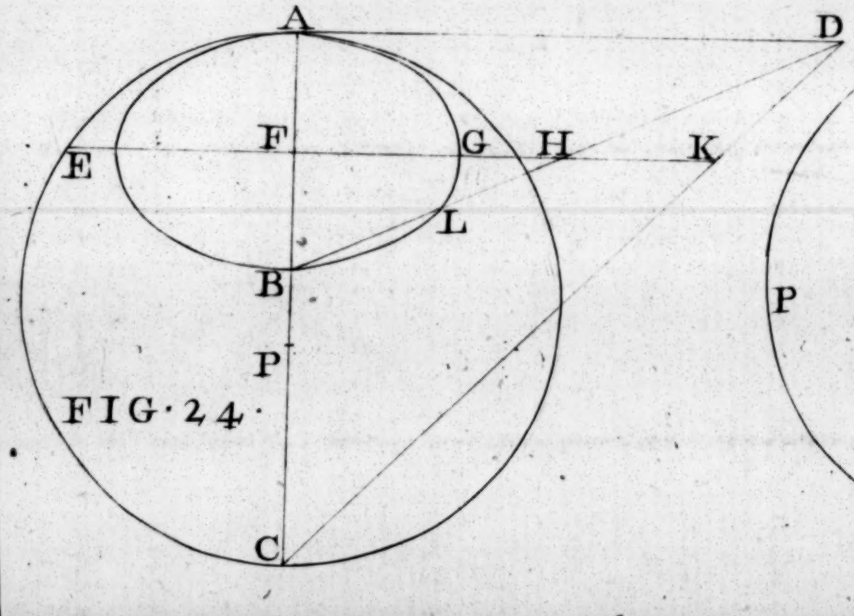
FIG·29·



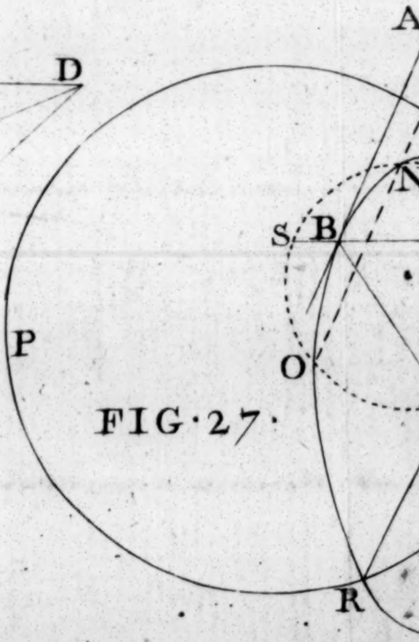
FIG·23·



FIG·26·

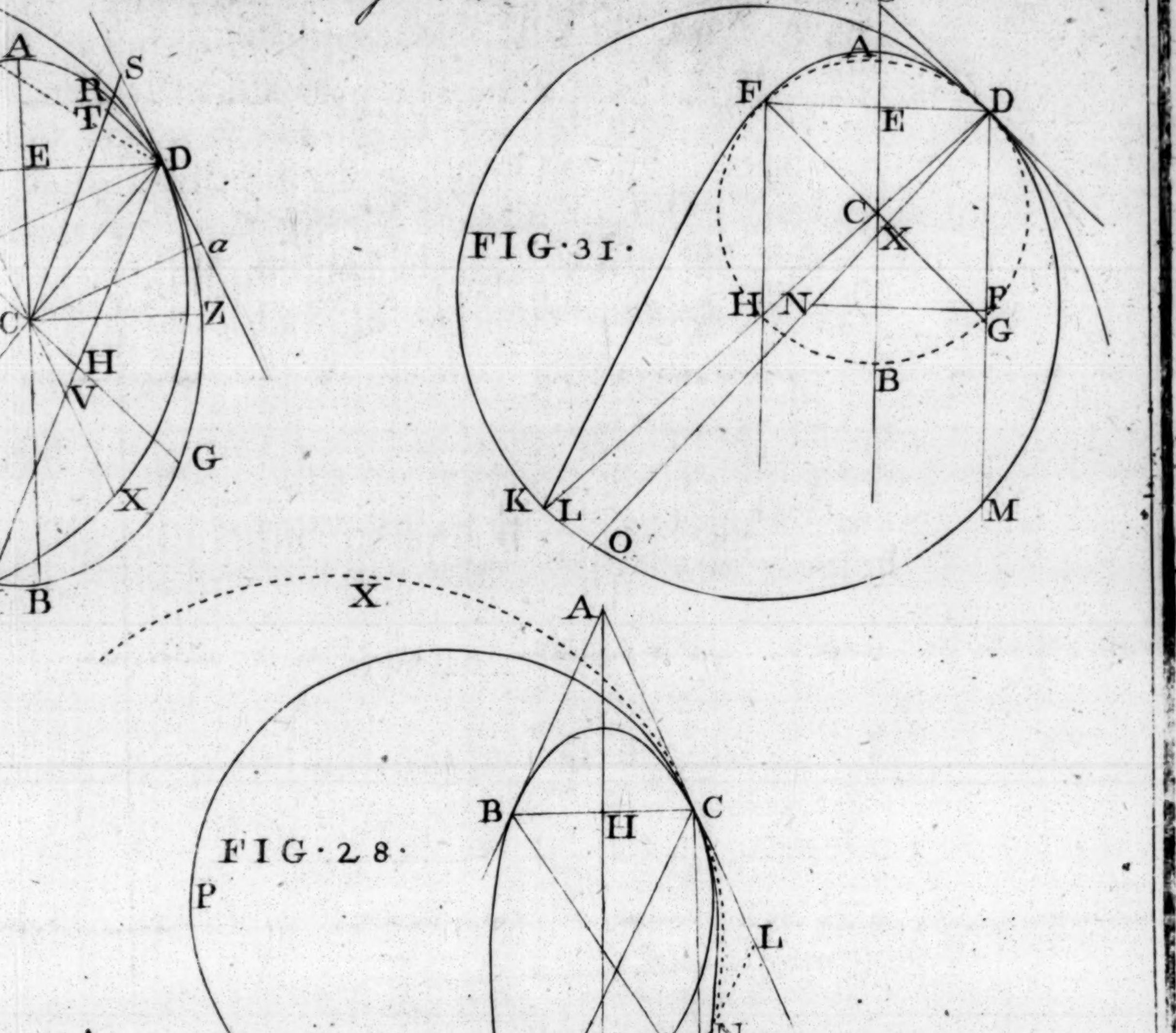


FIG·24·



FIG·27·

TAB·16 · *Page*·202.



FIG·31·

FIG·28·

FIG·30·

7 AP 53

EM ad quadratum GC hoc est (ob similia triangula HEM, HGC) ut quadratum ex EH ad quadratum ex GH. *Q. E. D.*

Si contingentes quibus secans occurrit sint inter se parallelæ propositio manifesta est ex Cor. 2. 18. lib. 1.

PROP. XX.

Si duæ rectæ DF, CA secantes sectionem conicam in punctis D, F & C, A sibi invicem occurrant in G, & etiam occurrant in punctis E, H rectæ sectionem contingenti in B, erit quadratum ex EB ad quadratum ex BH, in ratione composita ex ratione rectanguli DEF ad rectangulum CHA, & ratione rectanguli AGC ad rectangulum FGD. Fig. 33.

Cas. 1. PER punctum E, in quo una secantium DF contingenti occurrit, ducatur recta alteri secanti AC parallela quæ primo occurrat sectioni in punctis K, L, propter hasce parallelas secantes, erit quadratum ex EB ad quadratum ex BH, ut rectangulum KEL ad rectangulum CHA; sed ratio rectanguli KEL ad rectangulum CHA componitur, ex ratione rectanguli KEL ad rectangulum AGC hoc est, ex ratione rectanguli DEF ad FGD, & ex ratione ejusdem AGC ad CHA; ergo ratio quadrati ex EB ad quadratum ex BH composita est ex ratione rectanguli DEF ad FGD & ex ratione rectanguli AGC ad CHA, hoc est ex ratione DEF ad CHA & ex ratione AGC ad FGD.

Cas. 2. Si nunc ducatur quævis recta ipsi DF parallela occurrens sectioni in punctis *d*, *f*, rectæ AC in *g* & contingenti in puncto *e* per quod recta ducta ipsi AC parallela sectioni non occurit; tum positis jam demonstratis, ratio quadrati ex *e*B ad quadratum ex BH; componitur ex ratione quadrati ex *e*B ad quadratum ex EB & ratione quadrati ex EB ad quadratum ex BH; componitur ergo, ex ratione rectanguli *def* ad DEF (Cor. 4. 18. lib. 1.) &

 ejusdem

ejusdem DEF ad CHA, & AGC ad FGD, per casum præcedentem, hoc est, ex ratione rectanguli *def* ad CHA & AgC ad *fgd*, (quia sciz. omitti potest rectangulum DEF quod est tam inter antecedentes quam inter consequentes quæ rationem componunt & pro AGC, FGD, substituti possunt AgC, *fgd* quæ sunt inter se ut ipsa AGC, FGD, per Prop. 18. lib. 1.) ergo in hoc casu etiam constat propositum.

Duæ præcedentes propositiones a *Newtono* partim demonstrantur in Prop. 23 & 24. lib. 1. Prin. Math.

PROP. XXI. PROBL. I.

Datis in sectione conica quinque punctis ipsam describere.

FIG. 34. SINT F, G, K, M, N quinque puncta data in sectione conica, jungantur quatuor ex iis, duabus rectis FG, MN sibi invicem occurrentibus in puncto R, & per punctum quintum K, ducantur duæ rectæ KD, KH parallelæ rectis FG, MN, & occurrentes ipsis MN, FG in punctis E & Q; in istis rectis KD, KH, (si opus productis) sumantur puncta D, H, ita ut rectangulum KED sit ad MEN, ut GRF ad MRN, & ut KQH sit ad GQF, ut MRN, ad GRF; (oportet autem puncta K, D, vel K, H esse ad easdem aut diversas partes punctorum E, vel Q. prout puncta M, N, vel G, F, sunt ad easdem vel diversas partes eorundem punctorum E, vel Q.) Patet per Prop. 18. lib. 1. quod puncta D, & H, sunt in sectione conica per quinque puncta F, G, K, M, N transeunte; ducatur igitur recta IL bifariam secans parallelas KD, GF sectione terminatas, erit hæc diameter sectionis, & ducatur altera diameter AB, bifariam secans parallelas KH, MN in O, P; si hæ diametri sint inter se parallelæ, sectio erit Parabola & cum in ea dantur quatuor puncta K, M, N, G ipsa describi potest per casum secundum Prop.
9.

9. lib. 3. Si vero diametri ſibi invicem occurrant ut in puncto C, erit ſectio Ellipſis aut Hyperbola quæ deſcribi poteſt per Cor. 3. Prop. 10. lib. 4. nam datur centrum ejus C, & poſitione datur diameter AB cui ordinatim applicantur parallelæ KH, MN.

In hoc problemate & ſequentibus cum ſectio deſcribenda dicitur Ellipſis, inter Ellipſes numeratur circulus.

PROP. XXII. PROBL. II.

Sectionem conicam deſcribere quæ per tria puncta data tranſeat, & duas rectas poſitione datas contingat.

SINT rectæ AV, AB poſitione datæ; & primo deſcribenda ſit ſectio quæ has rectas contingat in datis punctis B, V, & tranſeat per tertium punctum datum intra angulum BAV. Fig. 35.

Si rectæ AB, AV, ſint parallelæ ſectio deſcribenda erit Ellipſis ejuſque diameter erit juncta BV, cui ordinatim applicata erit recta ducta per tertium punctum datum & ipſis AB, AV parallela, & proinde ſectio in hoc caſu facile deſcribitur, per Cor. Prop. 35. lib. 2.

Caſ. 1. Occurrant vero rectæ AB, AV in A, biſariam ſecetur juncta BV in P, & ducatur PA erit hæc diameter ſectionis deſcribendæ (26. lib. 1.) ſit nunc tertium punctum datum O in recta PA; ſi PO, OA ſint æquales, deſcribatur Parabola (per 33. lib. 2.) cujus diameter eſt recta PA, verticem habens O & cui ipſa BV ſit ordinatim applicata, rectæ AB, AV hanc Parabolam contingent in B & V ut conſtat ex Prop. 47. lib. 1. Si vero punctum O ſit inter P & A, et rectæ PO, OA ſint inæquales, producatur ipſarum minor ad C, ita ut CP, CO, CA ſint proportionales et ſumatur CQ æqualis ipſi CO; tum (per Cor. 35. lib. 2.) deſcribatur Ellipſis aut Hyperbola cujus diameter ſit OQ, cui recta VB ſit ordinatim applicata, ſectio rectas AB, AV continget in punctis B, & V (ut conſtat ex Prop.

48,

48, 49. lib. 1.) si PO minor sit ipsâ OA sectio erit Ellipsis aliter Hyperbola. Si punctum in recta PA datum sit Q non inter P & A; sumatur punctum C inter P & Q ita ut CP, CQ, CA sint proportionales, & sit CO æqualis ipsi CQ, tum diametro OQ describatur Ellipsis ut prius, continget rectas AB, AV in B, & V, ut patet.

Si manentibus punctis B & V, datum sit tertium punctum K non in AP diametro sectionis; ducatur KE ipsi BV parallela occurrens contingenti AB in L & ipsi AP in F & sit FE æqualis ipsi KF, & a puncto L sumatur versus K, recta LG cujus quadratum sit æquale rectangulo KLE, jungatur BG occurrens ipsi AP in O; tum ut prius describatur sectio contingens rectas AB, AV in B & V, & transiens per punctum O, transibit hæc per punctum datum K; nam si non, occurrat sectio rectæ KE in R & sit FT æqualis ipsi RF, quoniam RF est parallela rectæ BV erit ordinatim applicata diametro AP & ergo erit punctum T in sectione, & erunt KR, TE æquales, ducatur per O recta sectionem contingens, occurrens contingenti AB in N, erit hæc parallela ipsi LRT, ergo rectangulum RLT est æquale quadrato ex LG (per Prop. 53. lib. 1.) hoc est rectangulo KLE, quod est absurdum; ergo sectio transit per punctum datum K.

Fig. 36. *Cas.* 2. Sint nunc AB, AV rectæ positione datæ, & K, E, F tria puncta inter has rectas; oportet sectionem contingere has rectas & per hæc puncta transire.

Jungantur puncta K, F, & K, E rectis quæ ocurrant rectis AB, AV, in punctis D, G & L, N; in recta KF sumatur punctum H ita ut quadratum ex HD sit ad quadratum ex HG, ut rectangulum KDF ad rectangulum FGK, & in recta KE sumatur punctum P, ita ut quadratum ex PL sit ad quadratum ex PN, ut rectangulum KLE ad rectangulum ENK, ducatur recta jungens puncta H, P; si hæc occurrat in punctis B & V lateribus anguli BAV, intra quem sunt puncta tria data, per casum præcedentem describatur sectio

sectio contingens rectas AB, AV in B & V, & transiens per K, transibit hæc quoque per F & E; nam si hæc sectio non transeat per F occurrat rectæ KF in X; tum per Prop. 19. hujus, rectangulum KDX erit ad rectangulum XGK ut quadratum ex HD ad quadratum ex HG hoc est (per constructionem) ut rectangulum KDF ad rectangulum FGK, quod est absurdum; ergo sectio transit per punctum F, & similiter ostendetur eam transire per punctum E.

Si recta KF jungens duo e tribus punctis datis sit parallela ipsi AV uni e rectis positione datis; tum punctum in ea H ad alterutram partem puncti D sumendum est, ita ut quadratum ex DH sit æquale rectangulo KDF, ut patet ex Prop. 53. lib. 1.

Cum segmenta DK, FG, & proinde rectangula KDF, FGK, sint inæqualia, patet punctum H sumi posse vel inter K & F vel ad alteras partes segmenti minoris DK, & pari ratione punctum P sumi potest ad alterutras partes segmenti LK; & similiter ductâ rectâ per E, F, si hæc occurrat rectis AB, AV, in ea inveniri possunt duo puncta eodem modo quo inventæ fuerunt puncta H, P, & proinde aliquando duci possunt duodecim rectæ sicut recta HP ducta fuit, et quot ex his rectis occurrunt lateribus anguli BAV tot describi possunt sectiones quæ problemati in hoc casu satisfacient.

Cas. 3. Si positione dentur duæ rectæ AB, AV & oporteat sectionem describere quæ contingat rectam AV in puncto dato V & rectam AB in alio puncto & transeat per puncta data K, F; jungatur KF & in ea sumatur punctum H ut in casu præcedente, ducatur VH occurrens ipsi AB in B, tum ut prius describatur sectio contingens rectas AB, AV in B & V & transiens per K, transibit hæc per punctum F, ut in casu præcedente. Si punctum H in hoc casu sumi potest vel inter puncta K, F vel non, describi possunt duæ sectiones quæ in hoc casu problemati satisfacient.

In hac propositione solvuntur omnes casus Prop. 23. lib. 1. Prin. Math.

PROP.

PROP. XXIII. PROBL. III.

Datis in ſectione conica quatuor punctis & rectâ eam contingente poſitione datâ; ſectionem deſcribere.

FIG. 33. *Caſ.* 1. SINT A, F, D, C, quatuor data puncta in ſectione, & ſit EH recta eam contingens; ducantur rectæ AC, FD, occurrentes contingenti in punctis E & H; ſi hæ rectæ ſint parallelæ ſibi invicem, ſumatur in contingente punctum B, inter E et H ita ut quadratum ex EB, ſit ad quadratum ex BH, ut rectangulum DEF ad rectangulum CHA, erit B punctum contactus per Cor. 4. 18. lib. 1. et ſi ſegmentum EB majus ſit ſegmento BH, punctum B ſumi poteſt ad alteras partes puncti H; ſi vero rectæ AC, FD ſibi invicem occurrant ut in G, tum per Prop. 20. inveniri poteſt punctum contactus B, quod ut prius ſumi poteſt vel inter E et H vel non. Cum igitur quinque puncta A, F, D, B, C, in ſectione dantur, ſectio deſcribi poteſt per Prop. 21. hujus.

FIG. 37. *Caſ.* 2. Sint A, B, C, D puncta data in ſectione, et eam contingat recta GB in B; jungantur puncta data quatuor rectis conficientibus trapezium cujus nulla latera ſint parallela, occurrant ejus diagonales in E, et producantur latera ejus AD, BC, quæ ſibi invicem occurrant in F, ita ut juncta EF occurrat ipſi GB in G, (quod ſemper fieri licet) quoniam igitur in ſectione conica inſcribantur duæ rectæ AB, DC non inter ſe parallelæ, et ipſarum termini jungantur quatuor rectis ſibi invicem occurrentibus in punctis E et F, et contingens per B ducta occurrit junctæ EF in G, contingens per A ducta occurret ipſi EF in eodem puncto G, per Prop. 8. hujus, ergo juncta AG ſectionem deſcribendam continget. Deſcribatur igitur, per caſum primum præcedentis, ſectio quæ contingat rectas GA, GB, in punctis A, B, et tranſeat per punctum

C,

C, transibit etiam per D; nam si non, occurrat rectæ BD in X, tum juncta AX occurreret ipsi BC in E, per 8. hujus, quod est absurdum; ergo sectio transibit per D.

Si nunc AB, DC, duo latera trapezii sint parallela, recta EF ea bisecans erit diameter, et si contingens GB occurrat ipsi EF ut in G, tum contingens per A ducta occurret ipsi EF in eodem puncto G, in quo casu sectio describenda est ut prius; si vero contingens GB sit diametro EF parallela, contingens per A ducta erit eidem EF parallela, & sectio describenda erit Ellipsis, in qua recta AB erit diameter ipsi EF conjugata, & ergo si a puncto D vel C ducatur ad AB recta, ipsi EF parallela, erit hæc ordinatim applicata diametro AB, & exinde (per Cor. 1. 31. lib. 1.) inveniri possunt vertices diametri EF, et describi poterit Ellipsis per Prop. 35. lib. 2.

Si denique rectæ quatuor puncta data jungentes conficiant parallelogrammum, sectio erit Ellipsis cujus diametri conjugatæ sunt rectæ bifariam secantes latera opposita parallelogrammi, et earum magnitudines inveniuntur per Prop. 48. lib. 1. *Q. E. F.*

PROP. XXIV. PROBL. IV.

Datis positione quinque rectis, sectionem conicam contingentibus; invenire puncta contactus in ipsis, sciz. sectione positione non datâ.

CONTINGANT sectionem conicam rectæ AB, BC, CD, DE, EA, & invenienda sunt puncta contactus in ipsis. Fig. 38.

Sit ABCDE quinquelaterum contingentibus comprehensum, & appelletur AB *latus primum*, BC *latus secundum*, & ita deinceps; sitque FBCD quadrilaterum contentum primis quatuor lateribus, & ducantur rectæ diagonales BD, FC, sibi mutuo occurrentes in M: omisso jam quinquelateri primo latere AB, sit ICDE quadrilaterum reliquis contentum, & ducantur diagonales ipsius ID, CE sibi mutuo

 tuo

tuo occurrentes in N; & MN jungatur: transibit hæc per puncta in quibus latus secundum BC, & quartum DE, sectionem contingunt.

Sint enim G, H, K, L, O puncta contactus in ipsis AB, BC, CD, DE, EA, & jungantur GH, LK & GL, HK: quoniam igitur in sectione inscriptæ sunt GH, LK, estque B punctum concursus rectarum quæ sectionem in terminis ipsius GH contingunt, D vero concursus earum quæ eandem in terminis ipsius LK contingunt, erunt puncta B, D & intersectio junctarum GK, LH in recta linea, per Propositionem 8. hujus. Rursus, quoniam in sectione inscriptæ sunt GL, HK, rectæ vero quæ sectionem contingunt in G, L conveniunt inter se in F, quæ vero ipsam in H, K contingunt conveniunt in C; erunt puncta F, C & intersectio ipsarum GK, LH in recta linea: eadem autem intersectio ostensa fuit esse in recta BD; ergo ipsa erit in rectarum BD, FC occursu, hoc est, in puncto M; quod propterea erit in recta LH. Jungatur jam LO; &, quoniam in sectione inscriptæ sunt rectæ OH, LK, rectæ vero quæ sectionem in O, H contingunt conveniunt in I, & quæ ipsam in L, K contingunt conveniunt in D, erunt puncta I, D, & junctarum OK, LH intersectio, in recta linea; & quoniam OL, HK inscriptæ sunt in sectione, eadem ratione ostendentur puncta E, C, & earundem OK, LH intersectio, in recta linea existere: quare erit ipsa in rectarum ID, EC occursu, hoc est, in puncto N: est igitur N in recta LH, & ostensum fuit esse M in eadem; quare recta MN transit per L, H, puncta sciz. contactus in ipsis BC, DE. Et eadem prorsus ratione invenientur puncta contactus in reliquis rectis.

Fig. 39. Cor. Et similiter, si in sectione conica data sint quinque puncta A, B, C, D, E, facillime invenientur rectæ quæ sectionem in punctis istis contingunt, sectione sciz. positione non datâ.

Vocetur A *primum punctum*, B *secundum*, & ita deinceps; & jungantur quatuor prima puncta A, B, C, D, rectis AB, BC, CD, DA

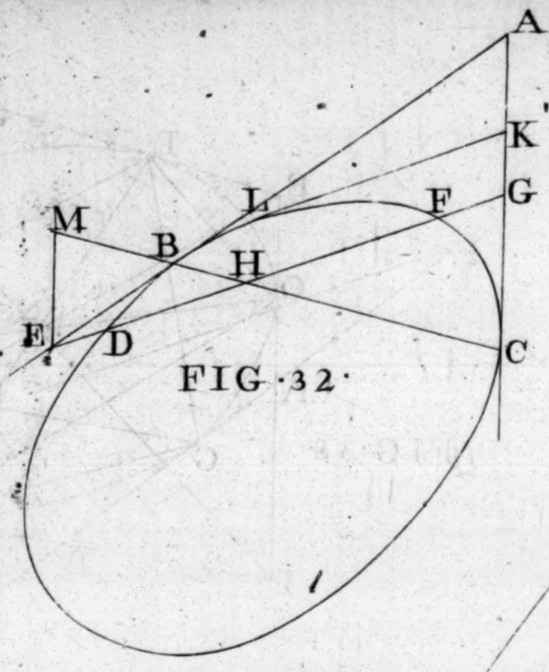
DA ſibi mutuo occurrentibus in punctis F, G; jungantur etiam AC, BD: & quoniam in ſectione inſcriptæ ſunt rectæ AC, BD, erunt (per Prop. 8. huj.) puncta F, G, & occurſus rectarum quæ ſectionem in punctis B, D contingunt, in recta linea, hoc eſt, juncta FG per occurſum hunc tranſibit. Omiſſo jam puncto A, ſit BCDE quadrilaterum reliquis quatuor contentum, ſintque puncta H, K interſectiones laterum ipſius, & EC jungatur: quoniam igitur in ſectione inſcriptæ ſunt EC, BD rectæ, erunt interſectiones H, K, & occurſus rectarum quæ ſectionem in B, D contingunt, in recta linea, hoc eſt, juncta HK per occurſum hunc tranſibit: idem vero occurſus oſtenſus fuit eſſe in recta FG, ergo ipſe in rectarum FG, HK interſectione L invenietur; et propterea junctæ LB, LD ſectionem in B, D punctis contingent. Et eadem prorſus ratione invenientur contingentes ſectionem in reliquis punctis.

Hæc Propoſitio ejus Corollarium ex Conicis Dom. *Roberti Simſon*, deſumuntur. vid. Cor. 2. & 3. Prop. 47. lib. 5. Edit. 1.

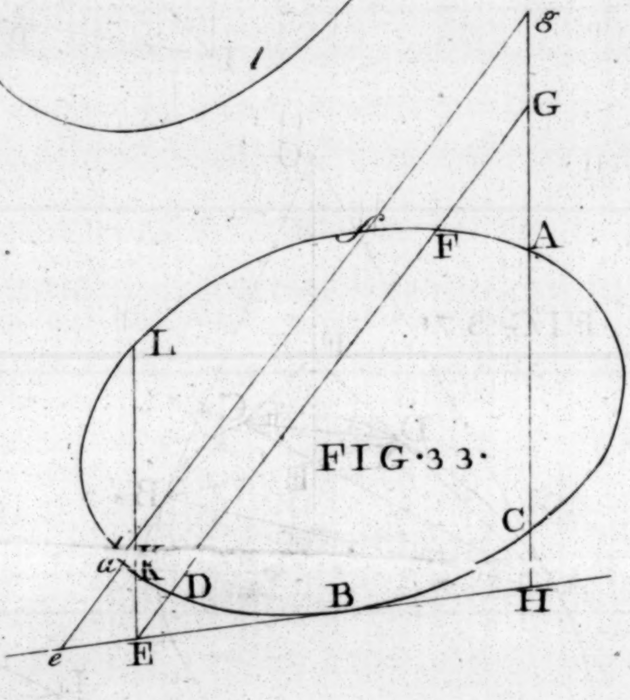
FINIS.

Errata sic Corrige.

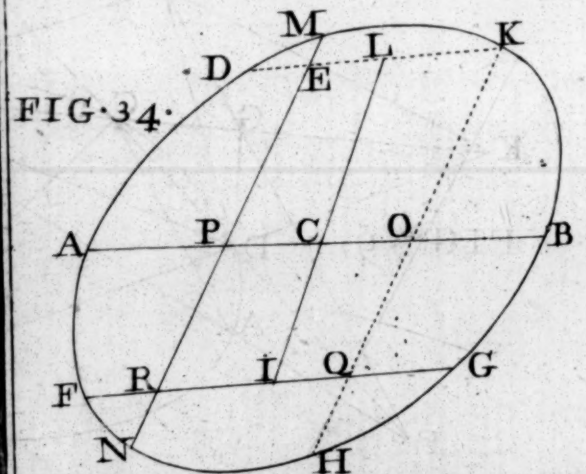
Pag. 2. *lin.* 26. *pro* ductæ. *lege* ducti *p.* 38. *l.* 23. *pro* obſciſſis *lege* abſciſſis. *p.* 57. *l.* 19. *pro* quas *lege* quibus. *p.* 60. *l.* 5. *pro* poſitæ *lege* poſita. *p.* 62. *l.* 28. *pro* aſymptoton *lege* aſymptotos. *p.* 63. *l.* 4. *pro* proprius *lege* propius. *p.* 132. *l.* 10. *pro* ſumaretur *lege* ſumeretur. *p.* 116. *l.* 18. & *p.* 118. *l.* 24. *pro* paxillum *lege* paxillus. *p.* 158. *l.* 17. *pro* quavis *lege* quaſvis. *p.* 163. *l.* 7. *pro* curvituram *lege* curvaturam. *p.* 174. *l. ult. pro* a & *lege* & a. *p.* 206. *l.* 25. *pro* ocurrant *lege* occurrant. *p.* 207. *l.* 18. *pro* inventæ *lege* inventa.



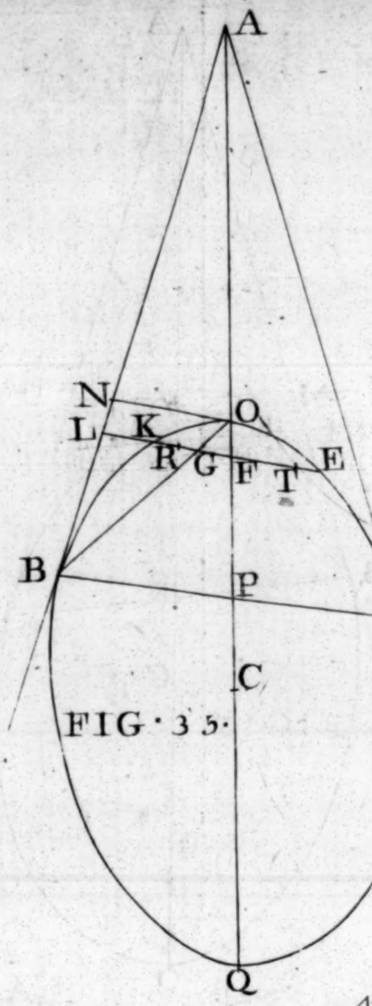
FIG·32·



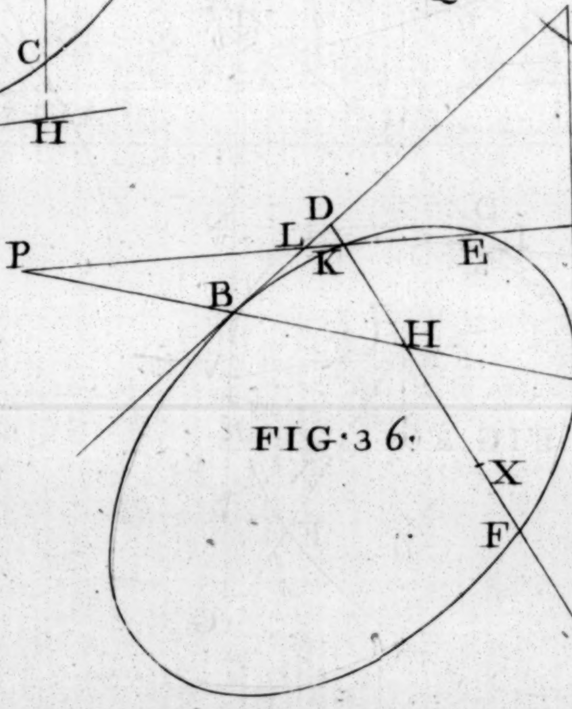
FIG·33·



FIG·34·



FIG·35·



FIG·36·

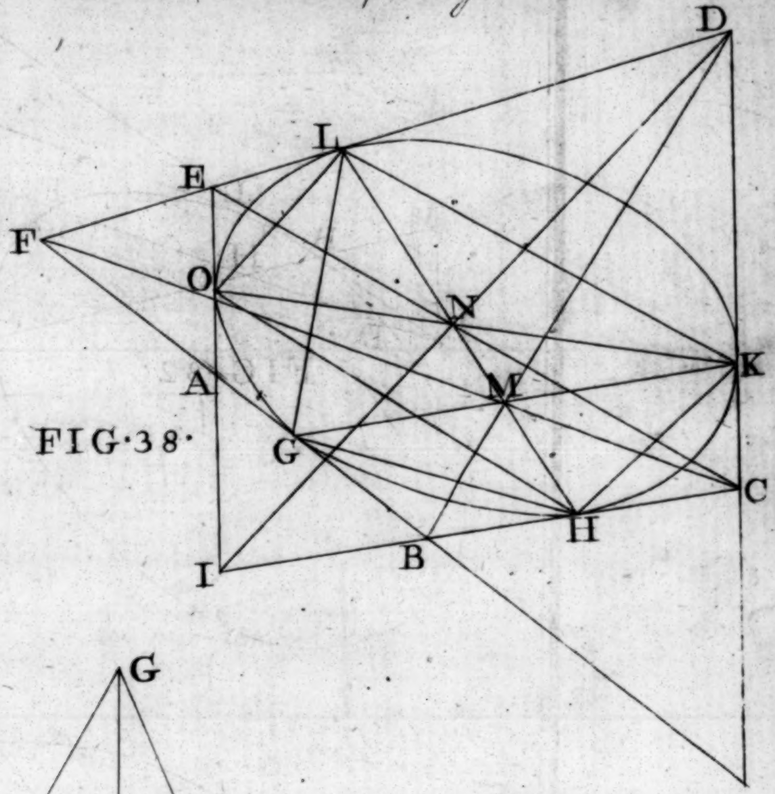


FIG. 38.

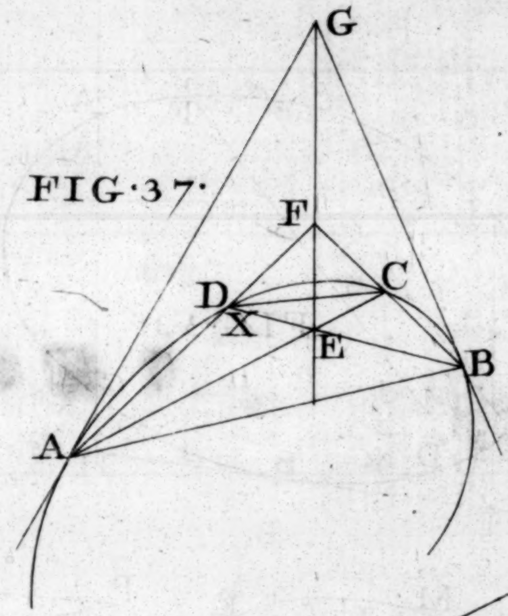


FIG. 37.

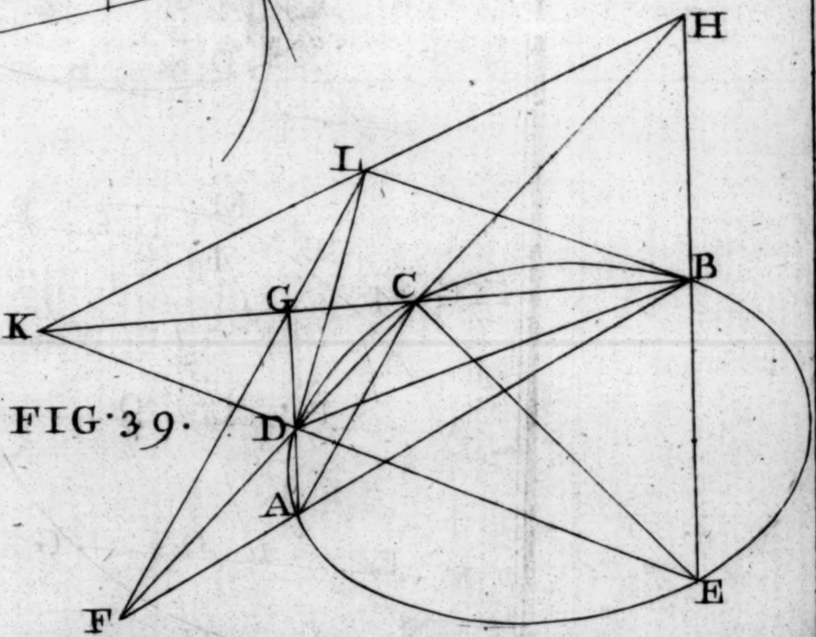


FIG. 39.